Filiala Braşov a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a IX-a

Timp de lucru: 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Numărul $\{-2\sqrt{3}\}(4+2\sqrt{3})$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a, este egal cu:
   A. 2 B. 3 C. 4 D. 1 E. alt răspuns

2. Cel mai mic element al mulţimii $\{x^2+3x+4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ este:
   A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{2}$ E. alt răspuns

3. Partea întreagă a numărului $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{12}{(3k+1)(3k+4)}$ este egală cu:
   A. 3 B. 1 C. 2 D. 0 E. alt răspuns

4. Fie expresia $E(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$, definită pentru $x \in (0,1)\setminus\{1/2\}$. Valoarea $E(2-\sqrt{3})$ este egală cu:
   A. $\dfrac{\sqrt{3}(5\sqrt{2}+3\sqrt{6})}{2}$ B. $-\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{3}$ C. $\dfrac{3\sqrt{3}-11}{6}$ D. $2(5-3\sqrt{3})$ E. alt răspuns

   Problemele 5 şi 6 se referă la următorul enunţ:

   Pe latura (BC) a triunghiului ABC considerăm punctul D, astfel ca $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$. Fie E mijlocul laturii AB, F mijlocul medianei (CE) şi $\{M\} = AC \cap BF$.

5. Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AD}$ este egală cu:
   A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$ E. alt răspuns

6. Dacă $\overrightarrow{BF} = y\overrightarrow{MB}$, atunci y este egal cu:
   A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$ E. alt răspuns

7. Valoarea $\min\{a^2+3ab+9b^2 |\ a,b\in\mathbb{R},\ ab=1\}$ este:
A. 8 B. 1 C. 9 D. 6 E. alt răspuns

8. Valoarea $\max\{3a+2b+c |\ a,b,c\in R,\ a^2+b^2+c^2=2\}$ este:
A. 5 B. $\sqrt{7}$ C. $\sqrt{14}$ D. $2\sqrt{7}$ E. alt răspuns

9. Notăm cu $\{x\}$ partea fracţionară a unui număr real x. Cel mai mic element al mulţimii $\{a+b |\ a,b\in\mathbb{N}^*,\ \{-2\sqrt{2}\}\cdot(a\sqrt{2}+b)\in\mathbb{Q}\}$ este:
A. 2 B. 5 C. 6 D. 10 E. alt răspuns

10. Fie $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$, $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci:
A. $S_{2020}=2019\cdot 2^{2021}+1$ B. $S_{2021}=2020\cdot 2^{2022}+2$ C. $S_{2020}=2020\cdot 2^{2021}+2$
D. $S_{2021}=2021\cdot 2^{2022}+2$ E. alt răspuns

11. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică. Notăm $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $n\in N^*$. Atunci este posibil să avem:
A. $S_n=3n^2+5n,\ \forall\, n\in N^*$ B. $S_n=8n+3,\ \forall\, n\in N^*$ C. $S_n=5(3^n-1),\ \forall\, n\in N^*$
D. $S_n=7^n,\ \forall\, n\in N^*$ E. alt răspuns

12. Funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ verifică proprietăţile: $f(0)\geq 0$ şi $f(x)+f([x])\cdot f(\{x\})=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Atunci numărul $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\dfrac{4}{3}\right)$ este egal cu:
A. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$ B. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ C. $\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}$ D. 1 E. alt răspuns

13. Suma soluţiilor ecuaţiei $\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=x$ este egală cu:
A. 3 B. 0 C. 1 D. -1 E. alt răspuns

14. Dacă $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x+k}{x+k-1}\right]$, atunci:
A. $S_n-n=0$ B. $S_n-n=1$ C. $S_n-n=2$ D. $S_n-n=-1$ E. alt răspuns

15. Dacă $x,y,z\in\mathbb{R}^*$ verifică relaţia $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$, atunci:
A. $x>0,\ y>0,\ z>0$ B. $x<0,\ y<0,\ z<0$ C. $(x+y)(x+z)(y+z)=1$
D. $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3$ E. alt răspuns

16. Numărul de elemente ale mulţimii

$$\left\{\{x\} \,\middle|\, \frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=3,\ x\in\mathbb{R}\setminus((0,1)\cup\mathbb{Z})\right\}\cap\left(\frac{674}{2021},\infty\right)$$

este egal cu:
A. 0 B. 2 C. 673 D. 674 E. alt răspuns

Problemele 17, 18 şi 19 se referă la următorul enunţ:

Fie triunghiul ABC şi punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât $x=\dfrac{A_1B}{A_1C}$, $y=\dfrac{B_1C}{B_1A}$, $z=\dfrac{C_1A}{C_1B}$.

17. Dacă $x = y = z \neq 1$, atunci:
A. dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente B. $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
C. A_1, B_1, C_1 sunt coliniare D. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{0}$ E. alt răspuns

18. Dacă $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{B_1A}$, atunci:
A. $x=y+z$ B. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$ C. $x=y=z$ D. $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{1}{3}$ E. alt răspuns

19. Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente şi $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{B_1A}$, atunci:
A. $xy+yz+zx=3$ B. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=2$ C. $x+y+z=1$ D. $x^2+y^2+z^2=9$
E. alt răspuns

20. Considerăm un şir $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puncte din plan, astfel încât A_0, A_1 şi A_2 sunt trei puncte necoliniare arbitrare, iar $\overrightarrow{A_0A_n}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_0A_{n-1}}\right)$, pentru orice $n \geq 3$. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 3}$ şi $(y_n)_{n\geq 3}$, astfel ca $\overrightarrow{A_0A_n}=x_n\cdot\overrightarrow{A_0A_1}+y_n\cdot\overrightarrow{A_0A_2}$. Atunci, pentru oricare $n \geq 3$, are loc relaţia:
A. $y_n=\dfrac{1}{2^{n-2}}$ B. $x_n+y_n=2$ C. $y_n=1-\dfrac{1}{2^{n-3}}$ D. $2x_n-x_{n-1}=0$
E. alt răspuns