

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa I

Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a X-a

Timp de lucru: 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Suma valorilor întregi ale lui n , care satisfac relaţia

$$\left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 \right]^2 < \left(\frac{3}{2} \right)^n < \left(\frac{81}{16} \right)^5.$$

este:

- A. 169 B. 144 C. 0 D. 121 E. alt răspuns

2. Ordonând crescător numerele $a = 2^{\sqrt{5}}$, $b = 3^{\sqrt{3}}$, $c = 5^{\sqrt{2}}$, se obţine:

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$ E. alt răspuns

3. Numărul natural n pentru care $n^2 \sqrt[n]{a^3} \cdot {}^{2n-2}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$, oricare ar fi $a > 0$, satisface condiţia:

- A. $n \geq 6$ B. n este par C. n este divizibil cu 4 D. n este divizibil cu 3
E. alt răspuns

4. Valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x-1}$, sunt:

- A. $x \in (-\infty, 1]$ B. $x \in [1, 2]$ C. $x \in [1, 2)$ D. $x \in (-\infty, 1)$ E. alt răspuns

5. Numărul $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ este egal cu:

- A. 2 B. $2\sqrt[3]{2}$ C. 0 D. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ E. alt răspuns

6. Valoarea $[2\sqrt[3]{4}]$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x , este:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. alt răspuns

7. Fie funcţia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $\forall x > 0$. Valoarea

$f(\sqrt{2})$ este:

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$ E. alt răspuns

8. Valorile parametrului real m pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} m^2x + m, & x \leq 1 \\ 4mx - 2, & x > 1 \end{cases}$$
 este surjectivă sunt:
 A. $m = 1$ B. $m \in \mathbb{R}^*$ C. $m \in (-\infty, 1]$ D. $m \in (0, 1] \cup [2, \infty)$ E. alt răspuns

Problemele 9 și 10 se referă la următorul enunț:

Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(2) = 1$ și $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

9. Pentru orice $x > 0$, are loc relația:
 A. $f(2x) = f(x)$ B. $f(x^2) = f(x)$ C. $f(x^3) = 3f(x)$ D. $f(2x^2) = 3f(x)$
 E. alt răspuns

10. Valoarea funcției f pentru $x = \sqrt[3]{1024}$ este:
 A. $\frac{7}{3}$ B. 1 C. $\frac{11}{3}$ D. $\frac{10}{3}$ E. alt răspuns

11. Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x}{\lg(2x^2 - 5x + 3)}}$ este:
 A. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ B. $(-\infty, 0]$ C. \emptyset D. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty)$
 E. alt răspuns

Problemele 12 și 13 se referă la următorul enunț:

Dacă prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x , atunci:

12. numărul $[\ln(10e)]$ este egal cu:
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. alt răspuns
13. numărul $[\lg(10e)]$ este egală cu:
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. alt răspuns

Problemele 14 și 15 se referă la următorul enunț:

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\ln(10e) + \ln^2 10)^x + (\lg(10e) + \lg^2 e)^x$.

14. Funcția f este:
 A. injectivă B. surjectivă C. bijectivă D. periodică E. alt răspuns
15. Ecuația $f(x) = 1$
 A. nu are soluții B. are o soluție negativă C. are o soluție pozitivă
 D. are două soluții E. alt răspuns

16. Suma soluțiilor ecuației $2^{\sqrt{x^3-4x}} + 3^{\sqrt{x^2-2x}} = 2$, este:
 A. 2 B. 0 C. 1 D. -1 E. alt răspuns
17. Fie $a = \log_{54} 36$. Atunci $\log_{16} 9$ este egal cu:
 A. $\frac{a+2}{6a+4}$ B. $\frac{3a+2}{2a+4}$ C. $\frac{2a-3}{a-1}$ D. $\frac{a-2}{4-6a}$ E. alt răspuns
18. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Valoarea minimă a expresiei $E = \log_a bc + \log_b ca + \log_c ab$ este egală cu:
 A. 0 B. 3 C. 5 D. 6 E. alt răspuns
19. Numărul de soluții ale sistemului $\begin{cases} 2^x + 2^y = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$ este:
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. alt răspuns
20. Dacă numerele reale x și y verifică sistemul $\begin{cases} 3^x = \frac{1}{y^2} \\ 2^y = \sqrt[3]{x} \end{cases}$, atunci $x + y$ este:
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{3}{5}$ E. alt răspuns