

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa I

Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a XI-a

Timp de lucru: 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A) = -2, \det(B) = -5$ şi $\det(C) = 7$, atunci $\det(3ABC)$ este egal cu:

- A.** -630 **B.** 630 **C.** -210 **D.** 210 **E.** alt răspuns

Problemele **2-4** se referă la următorul enunţ:

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este:

- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4 **E.** alt răspuns

3. Suma $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2021}$ este egală cu:

- A.** $\frac{3^{4040}}{8}A$ **B.** $\frac{3^{4040}-1}{8}A$ **C.** $\frac{3^{4042}-1}{8}A$ **D.** $\frac{3^{4042}-1}{4}A$ **E.** alt răspuns

4. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^{2021} = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este:

- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 2021 **E.** alt răspuns

5. Maximul mulţimii

$$A = \left\{ z^2 + t^2 \mid \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ pentru } x, y \in \mathbb{R} \text{ cu } x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

este:

- A.** 60 **B.** 200 **C.** 180 **D.** 160 **E.** alt răspuns

Problemele **6-7** se referă la următorul enunţ:

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ pentru care $\det(A^2 - 2021I_2) = 0$.

6. $\det(A)$ este egal cu:

- A.** 0 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2021}$ **D.** 2021 **E.** alt răspuns

7. Matricea A^2 este egală cu:

- A.** A **B.** $2021A$ **C.** $2021I_2$ **D.** 2021^2A **E.** $-A$

8. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Care condiţie nu este suficientă pentru ca A^2 să fie egală cu O_2 ?

- A.** $A^3 = O_2$ **B.** $A = \operatorname{tr}(A)I_2$ **C.** $\operatorname{tr}(A)A = \det(A)I_2$ **D.** $\operatorname{tr}(A) = -\det(A)$ **E.** $A = O_2$

9. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

este nenul pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este egală cu:

- A.** $(1, 4)$ **B.** $\mathbb{R} \setminus [\frac{1}{2}, 2]$ **C.** $(2, 3)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus [2, 3]$ **E.** \emptyset

10. Mulțimea matricelor inversabile de ordin 3, cu mulțimea elementelor egală cu

$$\{1, 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^3}, 2^{2^4}, 2^{2^5}, 2^{2^6}, 2^{2^7}\},$$

are cardinalul egal cu:

- A. $9!$ B. C_9^3 C. $8!$ D. $8! - 7!$ E. alt răspuns

11. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir cu limita egală cu 3. Dacă

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i^2},$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$$

este egală cu:

- A. 0 B. 9 C. 3 D. 10 E. alt răspuns

12. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive pentru care

$$\forall n \geq 1 : (n+1)x_{n+1} - nx_n < 0.$$

Cel mai mic număr $M > 0$ pentru care $x_n \geq \frac{1}{M}$, $\forall n \geq 1$ este:

- A. 1 B. $\ln(2)$ C. e D. $\pi/2$ E. nu există

13. Valoarea limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

este:

- A. 0 B. $1/12$ C. 1 D. $1/6$ E. alt răspuns

14. Valoare limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^{k+1}}{(1+3^{k-1})(1+3^k)}$$

este:

- A. $9/2$ B. $9/4$ C. $3/2$ D. $3/4$ E. 3

15. Valoarea limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \cos \left(\frac{2}{n} \right) \right)$$

este:

- A. 0 B. ∞ C. $5/2$ D. $5/6$ E. alt răspuns

Problemele 16-18 se referă la următorul enunț:

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 = a > 0$ și relația de recurență

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right), \quad \forall n \geq 2.$$

16. Pentru $a = 2$, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este:

- A. crescător B. descrescător C. nu este monoton D. constant E. nedescrescător

17. Valorile lui a pentru care șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict monoton sunt:

- A. $(\sqrt{2}, \infty)$ B. $[2, \infty)$ C. $(0, 2]$ D. $(0, \sqrt{2}]$ E. alt răspuns

18. Limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este:

- A. 2 B. 0 C. ∞ D. 1 E. alt răspuns

Problemele **19-20** se referă la următorul enunț:

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general

$$a_n = n \left(nz + \sqrt{n^2 + nx + y} \right), \quad \forall n \geq 1,$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

19. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

dacă și numai dacă:

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$

E. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$

20. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, atunci numărul real u pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^u \ln a_n = -\frac{1}{2}$$

este egal cu:

A. 4

B. 1

C. 1/2

D. $1/\sqrt{e}$

E. 2