Filiala Braşov a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a VII-a

Timp de lucru: 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Dacă a şi b sunt numere raţionale, astfel încât $a + b\sqrt{3} + 5 = b + 2a\sqrt{27}$, atunci produsul $a \cdot b$ este egal cu:
   A. -1 B. 6 C. -5 D. 2 E. alt răspuns

2. Rezultatul calculului $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^{2021}}}{5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2021}}}$ este:
   A. $\dfrac{1}{5^{2022}}$ B. $\dfrac{1}{5^{1011}}$ C. $\dfrac{1}{5}$ D. 1 E. alt răspuns

3. Dacă $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ atunci numărul $\dfrac{b}{a} - \sqrt{2}$ este egal cu:
   A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $1 - \sqrt{2}$ E. alt răspuns

4. Pentru câte numere naturale nenule n, numărul $\sqrt{3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}$ este natural?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. o infinitate de numere E. alt răspuns

5. Suma numerelor $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{ab} + 2} = a + b$ este:
   A. 23 B. 62 C. 85 D. 99 E. alt răspuns

6. Fie numerele $a = \dfrac{\sqrt{2020} + 1}{\sqrt{2019}}$ şi $b = \dfrac{\sqrt{2020} - 1}{\sqrt{2019}}$. Pentru câte valori ale numărului natural n, are loc relaţia $a^n + b^n \geq 2$?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. alt răspuns

7. Lungimea razei cercului circumscris triunghiului cu laturile a, b, c, care verifică relaţia: $\sqrt{a - 12} + \sqrt{b - 16} + \sqrt{c - 20} = 0$, este:
   A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. alt răspuns

8. Pentru câte numere naturale, nenule n, numărul $\sqrt{\underbrace{4...4}_{n}\underbrace{8...8}_{n-1}9}$ este raţional?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. alt răspuns

9. Numărul perechilor ordonate (x, y) de numere naturale pentru care are loc relaţia $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$ este:
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. alt răspuns

10. Numărul $a = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ aparţine mulţimii:
A. $\mathbb{N}$ B. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ D. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ E. alt răspuns

11. În rombul $ABCD$, $BD = 24\,\text{cm}$, $AC = 32\,\text{cm}$. Distanţa în cm de la B la CD este:
A. $38,5$ B. 20 C. $19,2$ D. $9,6$ E. alt răspuns

12. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \| CD$, $AB > CD$, $AD = BC = 15\,\text{cm}$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ este AC, cu $AC \perp BC$. Dacă $BC \cap AD = \{M\}$, atunci perimetrul triunghiului ABM, exprimat în cm, este egal cu:
A. 75 B. 45 C. $45\sqrt{3}$ D. 90 E. alt răspuns

13. În triunghiul ABC, D şi E sunt mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[AC]$. Dacă $AD \perp BE$, $AD \cap BE = \{F\}$, $AD = 24\,\text{cm}$ şi $BE = 30\,\text{cm}$, atunci aria triunghiului ABF, exprimată în cm^2, este egală cu:
A. 160 B. 360 C. 90 D. 720 E. alt răspuns

14. În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \| CD$, $AB > CD$, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 45^\circ$, $CD = 20\,\text{cm}$, $AD = 18\,\text{cm}$. Lungimea în cm a liniei mijlocii a trapezului este:
A. 19 B. 30 C. 28 D. 29 E. alt răspuns

15. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R. Dacă $CE \perp AB$, $(CO \cap \mathcal{C} = \{F\}$, cu $F \in \overset{\frown}{AB}$ şi $E \in \overset{\frown}{AF}$, atunci:
A. $m(\overset{\frown}{EF}) > 180^\circ$ B. arcele $A\overset{\frown}{E}F$ şi $B\overset{\frown}{F}E$ sunt congruente C. $m(\widehat{BAC}) > 90^\circ$
D. arcele $C\overset{\frown}{B}F$ şi $A\overset{\frown}{E}F$ sunt congruente E. alt răspuns

16. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R, iar PT tangentă la cerc, cu $T \in \mathcal{C}$. PO intersectează cercul în punctele A şi B, astfel încât $PA < PB$. Dacă triunghiul BPT este isoscel, atunci măsura arcului mic $\overset{\frown}{BT}$ este egală cu:
A. 90° B. 135° C. dublul măsurii arcului mic $\overset{\frown}{AT}$ D. 150°
E. alt răspuns

17. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R. Punctul A este exterior cercului, iar punctul B se află pe cerc, astfel încât AB este tangentă la cerc. $AO \cap \mathcal{C} = \{C, D\}$, cu $AD > AC$, iar $m(\widehat{BAC}) = 40°$. Punctul E se află pe arcul $C\overset{\frown}{B}D$, $E \neq C$, astfel încât $m(\overset{\frown}{BE}) = 50°$, iar $AB \cap DE = \{F\}$. Măsura unghiului $\widehat{AFD}$ este egală cu:
A. $120°$ B. $2 \cdot m(\overset{\frown}{BC})$ C. $80°$ D. $75°$ E. alt răspuns

18. În dreptunghiul $ABCD$, $AB < BC$, măsura unghiului format de diagonale este de $60°$. Considerăm un punct oarecare M situat pe latura (CD) a dreptunghiului. Dacă $AM \cap BC = \{N\}$ şi $BM \cap AD = \{P\}$, atunci suma ariilor triunghiurilor ADN şi BCP este egală cu:
A. $AB^2\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{2}AC^2$ C. AB^2 D. $\frac{3}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$ E. alt răspuns

19. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii AC, N aparţine segmentului BM, astfel încât $\frac{BN}{BM} = \frac{1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $AN \cap BC = \{P\}$. Atunci raportul dintre ariile triunghiurilor BNP şi AMN este egal cu:
A. $\frac{1}{n^2 - n}$ B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{1}{2(n^2 - n - 2)}$ D. $\frac{2}{(n-1)(n^2 - n - 2)}$
E. alt răspuns

20. În dreptunghiul $ABCD$, M este mijlocul laturii BC, $AM \cap BD = \{E\}$ şi $AF \perp BD$, cu $F \in (BD)$. Dacă $\frac{\mathcal{A}_{AEF}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{24}$, atunci raportul $\frac{EF}{BD}$ este egal cu:
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$ E. alt răspuns