

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a XII-a

Timp de lucru: 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

Problemele 1 - 6 se referă la următorul enunţ:

Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziţie $x \circ y = 2xy - x - y + 1$, pentru orice numere reale x şi y .

1. Elementul neutru al legii " \circ " este egal cu

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$ E. alt răspuns

2. Simetricul lui 7 în raport cu legea " \circ " este egal cu

- A. 7 B. 1 C. $\frac{7}{13}$ D. $\frac{13}{7}$ E. alt răspuns

3. Numărul $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \cdots \circ \frac{1}{2021}$ este egal cu

- A. 1 B. 0 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ E. alt răspuns

4. Numărul perechilor de numere întregi (a, b) pentru care $a \circ b = 2021$ este egal cu

- A. 1 B. 2021 C. 0 D. 6 E. alt răspuns

5. Utilizând faptul că funcţia $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism de între grupurile $\left(\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \circ \right)$ şi (\mathbb{R}^*, \cdot) , numărul $a + b$ este egal cu

- A. 1 B. 0 C. -1 D. $\frac{1}{2}$ E. alt răspuns

6. Numărul soluţiilor ecuaţiei $x \circ x = 2021$ este egal cu

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 100 E. alt răspuns

Problemele 7 - 11 se referă la următorul enunț:

Pentru fiecare număr real a , se consideră funcțiile $f; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + ax + 1}{e^x}$, pentru orice număr real x și g o primitivă oarecare a lui f .

7. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{3}{e}$

- A. 1 B. 0 C. 3 D. -1 E. alt răspuns

8. Mulțimea valorilor lui a pentru care funcția g este strict crescătoare este egală cu

- A. $(0, 4)$ B. $(0, 4]$ C. $[0, 4)$ D. $[0, 4]$ E. alt răspuns

9. Cel mai mare număr real a pentru care funcția g este concavă este egal cu

- A. 1 B. $\frac{4}{5}$ C. 0 D. $\frac{5}{4}$ E. alt răspuns

10. Limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, este egală cu

- A. 0 B. a C. $2a + 1$ D. $\frac{2a + 1}{e}$ E. alt răspuns

11. Limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = n \cdot \int_0^1 x^n f(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, este egală cu

- A. 0 B. $\frac{1}{e}$ C. $2a + 1$ D. $\frac{2a + 1}{e}$ E. alt răspuns

Problemele 12 - 14 se referă la următorul enunț:

Se consideră mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

12. Numărul legilor de compoziție definite pe mulțimea M este egal cu

- A. 16^{16} B. 4^{16} C. 16^2 D. 16^4 E. alt răspuns

13. Numărul legilor de compoziție care admit element neutru pe 0, definite pe mulțimea M este egal cu

- A. 9^4 B. 4^{16} C. 4^9 D. 9 E. alt răspuns

14. Numărul legilor de compoziție comutative definite pe mulțimea M este egal cu

- A. 4^{10} B. 4^9 C. 16^2 D. 2^{10} E. alt răspuns

15. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, pe mulțimea \mathbb{R} , se definește legea $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Mulțimea valorilor lui n pentru care legea ” $*$ ” admite element neutru, este egală cu

A. \mathbb{N} B. $\{3\}$ C. $\{2k + 1 | k \in \mathbb{N}^*\}$ D. $\{2k | k \in \mathbb{N}^*\}$
E. alt răspuns

Problemele 16 - 20 se referă la următorul enunț:

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ și șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ definit prin $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$, pentru orice număr natural n .

16. Numărul $\int_0^2 |f(x)| dx$ este egal cu

A. 2 B. 1 C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{2}{3}$ E. alt răspuns

17. Pentru orice număr natural nenul n este valabilă relația

A. $2nI_n = nI_{n-1}$ B. $2nI_n = (2n - 1)I_{n-1}$ C. $(2n + 1)I_n + 2nI_{n-1} = 0$
D. $2nI_n + (2n - 1)I_{n-1} = 0$ E. alt răspuns

18. Numărul $\int_0^1 x \sqrt{-f(x)} dx$ este egal cu

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 0 D. $\frac{4}{3}$ E. alt răspuns

19. Numărul $\int_0^1 \sqrt{-f(x)} dx$ este egal cu

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{4}$ C. 0 D. $\frac{\pi}{4}$ E. alt răspuns

20. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n |f(x)| dx$ este egală cu

A. 1 B. 0 C. $-\infty$ D. ∞ E. alt răspuns