



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

Subiecte – clasa a IX-a

Problema 1.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC . Fie O centrul cercului circumscris acestuia și D piciorul înălțimii din A . Știind că $OD \parallel AB$, arătați că $\sin 2B = \operatorname{ctg} C$.

Problema 2.

Fie $P_0, P_1, \dots, P_{2021}$ puncte pe cercul trigonometric, de centru O și rază 1, astfel încât, pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, 2021\}$, lungimea arcului de cerc parcurs în sens trigonometric de la P_{n-1} la P_n aparține intervalului $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Aflați lungimea maximă a vectorului

$$\vec{OP}_0 + \vec{OP}_1 + \dots + \vec{OP}_{2021}.$$

Problema 3.

Fie a, b, c numere strict pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$. Arătați că

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{13}{ab + bc + ca}.$$

Problema 4.

Fie A o mulțime finită de numere naturale. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ cu proprietatea că $f(|x - y|) = |f(x) - f(y)|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.