



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ  
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

**Subiectele – clasa a X-a**

**Problema 1.**

Determinați numerele complexe  $x, y, z$ , de același modul, știind că numerele  $x + y + z$  și  $x^3 + y^3 + z^3$  sunt reale.

**Problema 2.**

Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $d \neq 0$  și fie funcția  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definită prin

$$f(n) = \left[ \frac{an + b}{cn + d} \right], \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ . Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1°  $f$  este surjectivă.
- 2°  $c = 0$ ,  $b < d$  și  $0 < a \leq d$ .

**Problema 3.**

Fie  $n \geq 2$  un număr natural cu proprietatea că mulțimea rădăcinilor de ordin  $n$  ale unității are mai puțin de  $2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} - 1$  submulțimi cu suma elementelor nulă. Arătați că  $n$  este prim. (Am notat cu  $[x]$  partea întreagă a numărului real  $x$ .)

**Problema 4.**

Determinați numerele întregi nenule  $a$  pentru care există funcțiile  $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  care verifică ecuația funcțională:

$$f(x + g(y)) = g(x) + f(y) + ay, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Determinați toate aceste funcții.