Al doilea test EGMO 2021 – soluții

Problema 5. Pentru x număr real definim $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x\lfloor x^n \rfloor$, $n = 1, 2, \ldots$. Decideți dacă există $x > 1$, care nu este întreg, pentru care șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este periodic.

Soluție. Răspuns: nu există. Presupunem că șirul are perioada p. Atunci, pentru n suficient de mare avem $\lfloor x^{np+2} \rfloor - x\lfloor x^{np+1} \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor - x\lfloor x \rfloor$ și $\lfloor x^{np+1} \rfloor > \lfloor x \rfloor$, de unde rezultă $x = \frac{\lfloor x^{np+2} \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor}{\lfloor x^{np+1} \rfloor - \lfloor x \rfloor}$, deci x este rațional.

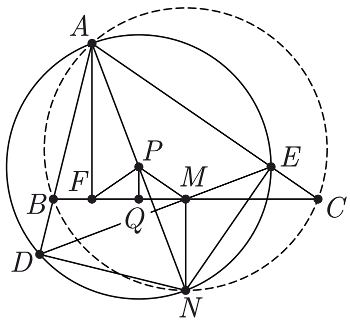
Din $\lfloor x^{np+r+1} \rfloor - x\lfloor x^{np+r} \rfloor = \lfloor x^{r+1} \rfloor - x\lfloor x^r \rfloor = a_r$, $r = \overline{1,p}$, avem $\sum\limits_{r=0}^{p-1} x^{p-1-r}\left(\lfloor x^{np+r+1} \rfloor - x\lfloor x^{np+r} \rfloor\right) = \sum\limits_{r=0}^{p-1} a_r x^{p-1-r} := A$ (unde $a_0 = a_p$), de unde obținem $\lfloor x^{(n+1)p} \rfloor - x^p\lfloor x^{np} \rfloor = A$, pentru orice $n \geqslant 1$.

Fie $y = x^p$. Atunci $\lfloor y^{n+1} \rfloor - y\lfloor y^n \rfloor = A$ pentru orice $n \geqslant 1$, de unde $\lfloor y^{n+2} \rfloor - \lfloor y^{n+1} \rfloor = y\left(\lfloor y^{n+1} \rfloor - \lfloor y^n \rfloor\right)$, deci $\lfloor y^{n+1} \rfloor - \lfloor y^n \rfloor$ este o progresie geometrică cu rația y. De aici deducem că $\lfloor y^{n+1} \rfloor - \lfloor y^n \rfloor = y^{n-1}\left(\lfloor y^2 \rfloor - \lfloor y \rfloor\right)$, pentru orice $n \geqslant 1$. Aceasta este însă imposibil, deoarece y este rațional dar nu întreg, deci numărul $y^{n-1}\left(\lfloor y^2 \rfloor - \lfloor y \rfloor\right)$ nu este întreg dacă n este suficient de mare.

Problema 6. Prin mijlocul M al laturii (BC) a triunghiului ABC se duce o dreaptă care taie semidreptele $(AB$ și $(AC$ în D, respectiv E, astfel încât $AD = AE$. Fie F piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC și P centrul cercului circumscris triunghiului ADE. Arătați că $PF = PM$.

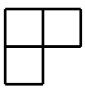
Soluție. Fie N mijlocul arcului $\widehat{BC}$ al cercului (A, B, C) care nu-l conține pe A. Atunci proiecțiile lui N pe BC, AB, AC sunt punctele M și D', E' astfel încât $AD' = AE'$ și M, D', E' sunt coliniare. Rezultă că DE este chiar dreapta lui Simson a punctului N în raport cu triunghiul ABC.

Din $ND \perp DA$ și $NE \perp EA$ reiese că AN este diametru în cercul (A, D, E).



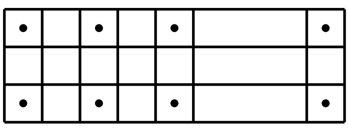
Fie $PQ \perp BC$, $Q \in BC$. Atunci $AF \parallel PQ \parallel MN$ și P este mijlocul lui AN, deci Q este mijlocul lui FM. Astfel, triunghiul PFM este isoscel cu baza FM, deci $PF = PM$.

Problema 7. Determinați toate perechile de numere naturale nenule (m, n), pentru care un dreptunghi $m \times n$ poate fi pavat cu piese de forma de mai jos, alcătuite din trei pătrate unitate.



Soluție. Dacă pavajul este posibil, atunci $3 \mid mn$ și, evident, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$.

În cazul unui dreptunghi $3 \times n$, cu n impar, pentru a acoperi pătratele marcate este nevoie de $2 \cdot \frac{n+1}{2} = n + 1$ piese – contradicție.

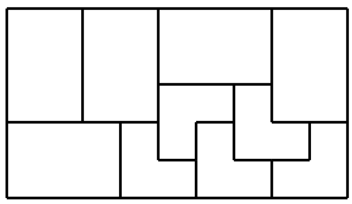


Vom arăta că, în toate celelalte cazuri, pavajul este posibil.

I. Dacă $3 \mid m$ și n este par, putem pava cu dreptunghiuri 3×2 obținute prin îmbinarea a două piese.

II. Dacă $3 \mid m$, m este par și $n \geqslant 3$ este impar, atunci $m = 6k$, dreptunghiul se partiționează în $2k$ dreptunghiuri 3×2 și un dreptunghi $m\times(n-3)$, iar fiecare dreptunghi se poate pava cu dreptunghiuri 3×2 obținute prin îmbinarea a două piese.

III. Dacă $3 \mid m$, $m > 3$ este impar și $n \geqslant 5$ este impar (altfel avem unul dintre cazurile deja analizate), atunci $m = 6k + 3$, cu $k \geqslant 1$ și dreptunghiul se partiționează într-un dreptunghi 9×5 (tip A), $k - 1$ dreptunghiuri 6×5 (tip B) și un dreptunghi $m \times (n - 5)$ (tip C). Dreptunghiurile tip B se încadrează în cazul II, cele de tip C se încadrează în cazul I, iar cel de tip A se poate pava ca în figură (nu a mai fost evidențiat pavajul dreptunghiurilor 3×2).



Problema 8. Determinați toate numerele naturale n pentru care există numerele naturale x, y prime între ele și numărul natural $k \geqslant 2$ astfel încât $3^n = x^k + y^k$.

Soluție. Răspuns: $n = 2$ sau $n = 0$.

Cazul $n = 0$ este evident; în continuare presupunem $n \geqslant 1$.

Dacă există numerele x, y, atunci niciunul dintre ele nu este divizibil cu 3. Reiese că, pentru k par, $x^k \equiv y^k \equiv 1 \pmod 3$, deci egalitatea nu este posibilă. Așadar, k este impar.

Obținem $3^n = (x+y)(x^{k-1} - x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1})$. Astfel, $x + y = 3^m$, cu $m \geqslant 1$. Din $x + y \equiv 0 \pmod 3$ obținem $x^{k-1} - x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1} \equiv kx^{k-1} \pmod 3$ și, cum $x^{k-1} - x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1} = 3^{n-m} \equiv 0 \pmod 3$ iar $x \not\equiv 0 \pmod 3$, reiese $3 \mid k$. Înlocuind $x_1 = x^{k/3}$ și $y_1 = y^{k/3}$, putem presupune $k = 3$. Atunci $x^3 + y^3 = 3^m$ și $x + y = 3^n$.

Vom arăta că $n \geqslant 2m$. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că $x^3 + y^3 \geqslant (x + y)^2$, sau $x^2 - xy + y^2 \geqslant x + y$. Aceasta rezultă imediat, scriind inegalitatea în forma $(x-y)^2 + (x-1)(y-1) - 1 \geqslant 0$.

Din identitatea $3xy(x+y) = (x+y)^3 - (x^3+y^3)$ obținem $xy = 3^{2m-1} - 3^{n-m-1}$. Deoarece xy nu este divizibil cu 3 și $2m-1 \geqslant 1$, rezultă că $n-m-1 = 0$, deci $m + 1 = n \geqslant 2m$, de unde $m = 1$ și $n = 2$. Astfel, singura valoare posibilă a lui n este 2.

Deoarece $3^2 = 2^3 + 1^3$, valoarea $n = 2$ convine.