Primul test EGMO 2021 – soluții

Problema 1. Șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este definit prin $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$. Arătați că, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$.

Soluție. Fie $b_n = 1/a_n$. Atunci $b_{n+1} = b_n^2 - b_n + 1$, deci $b_{n+1} - 1 = b_n(b_n - 1)$. Rezultă astfel $b_{n+1} - 1 = b_1 b_2 \ldots b_n (b_1 - 1) = b_1 b_2 \ldots b_n$, de unde

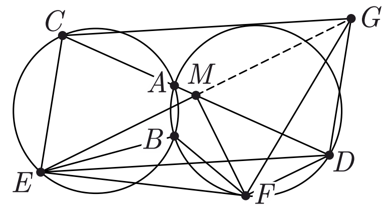
$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n} - \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1}}, \forall n \geqslant 1. \quad (1)$$

Adunând relațiile (1) rezultă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2a_1 - a_1 a_2 \ldots a_n = 1 - a_1 a_2 \ldots a_n < 1$.

Problema 2. Două cercuri se taie în punctele A și B. O dreaptă care trece prin A taie din nou cercurile în C, respectiv D. Fie E, respectiv F, mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$, respectiv $\overset{\frown}{BD}$, care nu-l conțin pe A și M mijlocul segmentului CD. Arătați că $ME \perp MF$.

Soluție. Fie G simetricul lui E față de M. Atunci $CEDG$ este paralelogram. Rezultă $DG = EC = EB$. Folosind și $BF = DF$, precum și $\widehat{FDG} = \widehat{FBE}$ (care rezultă relativ simplu prin *angle chasing*), obținem $\triangle DFG \equiv \triangle BFE$.

De aici reiese $FG = FE$ și, cum M este mijlocul lui EG, deducem $FG \perp GE$.



Problema 3. Fie X o mulțime finită cu $n \geqslant 3$ elemente și $A_1, A_2, \ldots, A_p$ submulțimi ale lui X, având, fiecare, câte 3 elemente, iar $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$ pentru $1 \leqslant i < j \leqslant p$. Arătați că există o submulțime A a lui X astfel încât niciuna dintre mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_p$ nu este inclusă în A și $|A| \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$.

Soluție. Dintre submulțimile lui X care nu includ niciun A_i, considerăm una cu număr maxim de elemente; fie aceasta A. Atunci, pentru fiecare $x \in X \setminus A$ există $i_x \in \overline{1,p}$ astfel încât $A_{i_x} \subset A \cup \{x\}$, deci $|A \cap A_{i_x}| = 2$. Dacă asociem fiecărui $x \in X \setminus A$ mulțimea $A \cap A_{i_x}$, atunci condiția $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$ asigură că fiecare x are un singur asociat și funcția $x \mapsto A \cap A_{i_x}$, de la $X \setminus A$ la mulțimea părților lui A cu două elemente, este injectivă. Astfel, dacă $|A| = k$, atunci $n - k \leqslant \binom{k}{2}$, de unde $2n \leqslant k^2 + k < (k+1)^2$, ceea ce duce la $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor < k + 1$, deci $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor \leqslant k$, q.e.d.

Problema 4. Considerăm în plan un sistem de coordonate, cu originea O. Vom spune că un punct laticial A este *ascuns* dacă segmentul deschis (OA) conține cel puțin un punct laticial. Demonstrați că, pentru orice număr natural n, există un pătrat de latură n astfel încât orice punct laticial din interiorul sau de pe laturile pătratului să fie *ascuns*.

Soluție. Trebuie să arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ putem găsi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x+i, y+j) > 1$, oricare ar fi $i, j \in \overline{0,n}$.

Pentru aceasta, vom dovedi inductiv $\mathcal{P}$: există numerele naturale $a_0, a_1, \ldots, a_n$ și $b_0, b_1, \ldots, b_n$ astfel încât $(a_i, a_j) = 1$ și $(b_i, b_j) = 1$ pentru $i \neq j$, iar $(a_i, b_j) > 1$ pentru orice i, j. Presupunând $\mathcal{P}$ demonstrată, finalizăm rezolvarea problemei folosind lema chineză a resturilor: există $x \in \mathbb{N}$ astfel $x \equiv -i \pmod{a_i}, \forall i \in \overline{0,n}$ și există $y \in \mathbb{N}$ astfel $y \equiv -j \pmod{b_j}, \forall j \in \overline{0,n}$. Astfel $(x+i, y+j) > 1$, oricare ar fi $i, j \in \overline{0,n}$.

Revenind la $\mathcal{P}$, observăm că ea se verifică banal pentru $n = 0$. Presupunem acum că avem numerele „bune” $a_0, a_1, \ldots, a_n$ și $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Considerăm numerele prime $p_0, p_1, \ldots, p_n$, $q_0, q_1, \ldots, q_n$, r, distincte două câte două, și care nu divid niciunul dintre numerele $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$. Atunci numerele $a'_0 = a_0 p_0, a'_1 = a_1 p_1, \ldots, a'_n = a_n p_n, a'_{n+1} = q_0 q_1 \ldots q_n r$ și $b'_0 = b_0 q_0, b'_1 = b_1 q_1, \ldots, b'_n = b_n q_n, b'_{n+1} = p_0 p_1 \ldots p_n r$ sunt, de asemenea, „bune” și inducția se încheie.

Variantă. Putem folosi lema chineză a resturilor fără a recurge la construcția precedentă: luăm numerele prime $p_{i,j}$, $i, j \in \overline{0,n}$ distincte două câte două și $x \in \mathbb{N}$ astfel $x \equiv -i \pmod{p_{i,j}}, \forall i, j \in \overline{0,n}$ și $y \in \mathbb{N}$ astfel $y \equiv -j \pmod{p_{i,j}}, \forall i, j \in \overline{0,n}$.