OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019
CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Traian Preda

a) Arătați că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021}$ este număr irațional
b) Aflați cel mai mare număr întreg negativ *x* cu proprietatea că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021 + x} \in \boldsymbol{Q}$
c) Aflați cel mai mic număr natural *n* cu proprietatea că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021 + n} \in \boldsymbol{Q}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $2020 \cdot 2021+2020+2021=2021^2+2020$	1p
$2021^2 < 2021^2+2020 < 2022^2 \Rightarrow 2021^2+2020$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow$ $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$	2p
b) $x = -2020$	2p
c) $2021^2+2020+n=2022^2 \Rightarrow n=2023$	2p

Obs.: La subpunctul a) se poate folosi și faptul că $2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021$ este $M_3 + 2$

Enunț subiect 2, autor Vasile Scurtu, Bistrița, G.M. nr. 12/2019

Fie *AB* un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Prin punctul *P*, mijlocul lui [*OA*], construim perpendiculara pe *AB* care intersectează cercul în *C* și *D*. Tangenta în *C* la cerc intersectează dreapta *AB* în *M*. Arătați că *A* este mijlocul segmentului [*OM*].

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
MC tangentă la cerc în $C \Rightarrow MC \perp OC \Rightarrow \sphericalangle MCO = 90^o$	1p
CP înălțime și mediană în $\Delta ACO \Rightarrow \Delta ACO$ isoscel de bază $[AO] \Rightarrow AC = OC$	1p
$AO = OC$ (raze) și $AC = OC \Rightarrow \Delta ACO$ echilateral $\Rightarrow AC = AO$ și	2p
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AOC = 60^o \Rightarrow \sphericalangle AMC = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o \\ \sphericalangle ACO = 60^o \Rightarrow \sphericalangle ACM = 90^o - 60^o = 30^o\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC$ isoscel $\Rightarrow$	2p
$\left.\begin{array}{l}AM = AC \\ AC = AO\end{array}\right\} \Rightarrow AM = AO \Rightarrow A$ este mijlocul segmentului $[OM]$	1p

Enunţ subiect 3, autor Bogdan Georgescu

a) Există numere naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = 2020$?
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 2020$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(\overline{ab} - \overline{cd})(\overline{ab} + \overline{cd}) = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$	1p
Cum $\overline{ab} - \overline{cd}$ și $\overline{ab} + \overline{cd}$ au aceeași paritate $\Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd} = 2$ și $\overline{ab} + \overline{cd} = 1010$ sau $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$ și $\overline{ab} + \overline{cd} = 202$	1p
care nu au soluții numere naturale de două cifre $\Rightarrow$ numerele nu există	1p
b) Un pătrat perfect este M_4 sau $M_4 + 1, 2020 = M_4 \Rightarrow$ și $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ sunt pare $\Rightarrow$	1p
$\overline{ab} = 2k, \overline{cd} = 2p \Rightarrow k^2 + p^2 = 505$, simetrică $\Rightarrow$ fie $5 \leq p < 16 \leq k \leq 22$	1p
cu soluțiile $21^2 + 8^2 = 505$ și $19^2 + 12^2 = 505 \Rightarrow$ $\overline{abcd} \in \{4216,1642,3824,2438\}$	2p

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, BD și CE înălțimile sale, unde $D \in (AC)$ și $E \in (AB)$. Bisectoarea $\sphericalangle ABD$ intersectează dreptele CE și AC în punctele M, respectiv P, iar bisectoarea $\sphericalangle ACE$ intersectează dreptele BD și AB în punctele N, respectiv Q. Demonstrați că:

a) *MNPQ* este romb
b) *MNPQ* este pătrat dacă și numai dacă *AB*=*AC*.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\sphericalangle PBC = 90^o - \sphericalangle C + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2}$, iar $\sphericalangle QCB = 90^o - \sphericalangle B + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2} \Rightarrow$	1p
$\sphericalangle PBC + \sphericalangle QCB = 180^o - \sphericalangle B - \sphericalangle C + 90^o - \sphericalangle A = 90^o$ Dacă notăm $BP \cap CQ = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle BOC = 90^o \Rightarrow$	1p
BO înălțime și bisectoare în ΔBQN $\Rightarrow QO = ON$ și, analog, $MO = OP \Rightarrow$	1p
$MNPQ$ paralelogram. Dar $MP \perp QN \Rightarrow MNPQ$ romb	1p
b) M ortocentrul $\Delta BQC \Rightarrow QM \perp BC$ și, analog, $PN \perp BC$	1p
$MNPQ$ pătrat $\Leftrightarrow \sphericalangle MQN = 45^o \Leftrightarrow \sphericalangle BCQ = 45^o \Leftrightarrow 90^o - \sphericalangle B + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2} = 45^o$	1p
$\Leftrightarrow 180^o = 2 \cdot \sphericalangle B + \sphericalangle A \Leftrightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle B + \sphericalangle A \Leftrightarrow \sphericalangle C = \sphericalangle B \Leftrightarrow AB = AC$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019
CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor Cristian Olteanu

a) Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$, unde $n\in\mathbf{N}^*$

b) Aflați $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $1+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1\cdot3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2\cdot4}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3\cdot5}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1)\cdot(n+1)}}}=$
$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2017}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}-1\right)$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ridicând la pătrat, obținem $\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^2\Leftrightarrow$	1p
$n-\sqrt{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(n+1+n-1-2\sqrt{(n+1)(n-1)}\right)\Leftrightarrow n-\sqrt{n^2-1}=n-\sqrt{n^2-1}$	2p
b) Aplicând a) obținem $1+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1\cdot3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2\cdot4}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3\cdot5}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1)\cdot(n+1)}}}=$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1})+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-\sqrt{1})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1)$	2p
$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2017}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}-1)$	1p
Obținem $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\Rightarrow n=2019$	1p

Enunţ subiect 2, autor Traian Preda

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M şi N mijloacele muchiilor AA', respectiv $C'D'$, iar O şi O' centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $ADD'A'$.

a) Demonstrați că $NO'\perp(B'CD')$

b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele MO şi NO'.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) NO' linie mijlocie în $\Delta AC'D'\Rightarrow NO'\parallel AC'$	1p
$ACB'D'$ tetraedru regulat $\Rightarrow AG\perp(B'CD')$, unde G centrul triunghiului $B'CD'$ $C'CB'D'$ piramidă triunghiulară regulată $\Rightarrow C'G\perp(B'CD')$	1p
$\Rightarrow AC'\perp(B'CD')$. Cum $NO'\parallel AC'\Rightarrow NO'\perp(B'CD')$	1p

b) Fie P mijlocul segmentului $CC' \Rightarrow OP\ l.m.$ în $\Delta BCC' \Rightarrow OP \parallel BC$ și $OP = \frac{BC}{2}$ Analog $MO' \parallel AD \parallel BC$ și $MO' = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow MOPO'$paralelogram $\Rightarrow$ $MO \parallel O'P \Rightarrow m(\sphericalangle MO, NO') = m(\sphericalangle O'P, NO') = m(\sphericalangle NO'P)$	2p
În $\Delta NO'P, NP = a\sqrt{2}, O'P = a\sqrt{5},$ iar $NO' = a\sqrt{3},$ unde am notat $AB = 2a$	1p
Din reciproca teoremei lui Pitagora obținem $\Delta NO'P$ dreptunghic în N $\Rightarrow \sin(\sphericalangle NO'P) = \frac{NP}{O'P} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$	1p

Obs. La subpunctul b) se poate considera și Q mijlocul segmentului AB

Enunţ subiect 3, autori Mihai Monea, Deva și Mihai Opincariu, Brad, G.M. 11/2019

Se consideră mulțimea $M = \{a^2 + 2b^2 | a, b \in \boldsymbol{N}\}$ și n un număr natural. Dacă $100n \in M$, demonstrați că $99n \in M$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$100n = a^2 + 2b^2 \Rightarrow a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow b^2 \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$	1p
Un pătrat perfect poate fi de forma $M_5, M_5 + 1$ sau $M_5 + 4$	1p
Cum $a^2 + 2b^2 \vdots 5,$ convine doar $a \vdots 5$ și $b \vdots 5 \Rightarrow a = 10x$ și b $= 10y \Rightarrow$	1p
$100n = 100x^2 + 200y^2 \Rightarrow n = x^2 + 2y^2 \Rightarrow n \in M$	1p
$9n = (3x)^2 + 2(3y)^2 \Rightarrow 9n \in M$	1p
Dacă notăm $9n = c^2 + 2d^2 \Rightarrow 99n = 11 \cdot 9n = (3^2 + 1^2 + 1^2)(c^2 + d^2 + d^2)$ $= (3c + d + d)^2 + (3c - d)^2 + (3c - d)^2 + (d - d)^2$ (Lagrange) $\Rightarrow$ $99n = (3c + 2d)^2 + 2(3c - d)^2 \Rightarrow 99n \in M$	2p

Obs. Alternativ $99n = (7^2 + 5^2 + 5^2)(x^2 + y^2 + y^2)$, etc.

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda

Fie *VABCD* o piramidă cu baza *ABCD* paralelogram. Considerăm punctele *P*,*Q* pe diagonala [*BD*] astfel încât $BQ = DP = \frac{BD}{6}$, *M* mijlocul muchiei [*VD*], iar $N \in (VB)$astfel încât $VN = 3NB$. Demonstrați că:

a) *(MPC)*∥*(AQN)*
b) *RS*∥*(MPC)*, unde *R* și *S* sunt mijloacele segmentelor [*AM*], respectiv [*NC*].

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)$DP = BQ = a \Rightarrow PQ = 4a.$ Construim $VU \parallel MP \Rightarrow PU = DP = a$	1p
$UQ = 4a - a = 3a \Rightarrow \frac{UQ}{QB} = \frac{VN}{NB} = 3 \xRightarrow{R.T.Thales} NQ \parallel VU \parallel MP$	1p
$AQ \parallel CP$ ($AQCP$ paralelogram) $\Rightarrow (AQN) \parallel (MPC)$	2p
b)Fie $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow RO$ linie mijlocie în $\Delta AMC \Rightarrow RO \parallel MC, MC \subset (MPC)$ $\Rightarrow RO \parallel (MPC)(1)$	1p
OS linie mijlocie în $\Delta ANC \Rightarrow OS \parallel AN, AN \subset (ANC) \Rightarrow OS \parallel (ANC) \parallel (MPC)(2)$	1p
Din (1)și(2) $\Rightarrow (ORS) \parallel (MPC),$ dar $RS \subset (ORS) \Rightarrow RS \parallel (MPC)$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a IX-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor *Valentin Nicula*

Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{4n+1}+\sqrt{9n+13}$ este număr raţional.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $m, n \in N^*$ astfel încât $\sqrt{m}+\sqrt{n}=r$, cu $r \in Q^*$. Rezultă că $\sqrt{m}=r-\sqrt{n}$. Avem $m=r^2-2r\sqrt{n}+n$ și implicit $\sqrt{n}=\frac{r^2+n-m}{2r}$, de unde $\sqrt{n} \in Q^*$.	2p
Fie $p, q \in N^*$, cu $(p,q)=1$astfel încât $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$. Avem $nq^2=p^2$, de unde $n \vdots p^2$. Rezultă $n=kp^2$, cu $k \in N^*$ și implicit $kq^2=1$, de unde $q^2=1$. În concluzie $\sqrt{n} \in N^*$ și din simetria relației $\sqrt{m} \in N^*$.	1p
Fie $p, q \in N^*$ astfel încât $4n+1=p^2$ și $9n+13=q^2$. Rezultă că $4q^2-9p^2=43$ și implicit $(2q-3p)(2q+3p)=43$.	2p
Din $2q-3p=1$ și $2q+3p=43$ obținem $q=11$ și $p=7$, de unde $n=12$.	2p

Enunţ subiect 2, autor *Mircea Ţeca*

Fie numerele reale a şi b cu proprietatea $[|a+b|]<4$. Arătaţi că $[ab]<4$. (Pentru a real se notează $[a]$ partea întreagă a lui a şi $|a|$ modulul lui a).

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din $[|a+b|]<4$ rezultă $[|a+b|] \le 3$, de unde $|a+b|<4$.	2p
Ridicând la pătrat obținem $a^2+2ab+b^2<16$ și implicit $(a-b)^2+4ab<16$. Rezultă că $4ab<16$, de unde $ab<4$.	4p
Cum $[ab] \le ab$, obținem în concluzie $[ab]<4$.	1p

Enunţ subiect 3, autor *Costin Negrii - G.M.10/2019*

Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia: $x^2 - y! = 2019$.
(Pentru n natural nenul se notează $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, iar $0! = 1$).

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru $y > 5$ numărul $y!$ este multiplu de 9 și cum 2019 este multiplu de 3, dar nu de 9, rezultă că x^2 este multiplu de 3 și nu de 9.	2p
Acest lucru nu este posibil, căci dacă x^2 se divide cu 3, atunci x^2 se divide și cu 9. Contradicția obținută arată că y este cel mult egal cu 5.	2p
Încercând toate valorile $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ singura care verifică $\sqrt{2019 + y!} \in \boldsymbol{N}$, este $y=3$ pentru care $x = 45$. În concluzie, avem soluția unică $x=45$ și $y=3$.	3p

Enunţ subiect 4, autori *Petre Simion, Cristian Ciobănescu*

În pătratul $ABCD$, fie $M \in AC$. Paralela prin M la AD intersectează BD în N, paralela prin N la DC intersectează AC în P, iar paralela prin P la BC intersectează DB în Q. Punctele O_1, O_2, O_3 şi O_4 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAB, NAB, PCB şi respectiv NBC. Demonstraţi că $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
N este ortocentrul triunghiului MAB, iar M este ortocentrul triunghiului NAB P este ortocentrul triunghiului NBC, iar N este ortocentrul triunghiului PBC	2p
Aplicăm Teorema lui Sylvester în triunghiurile MAB, NAB, PCB și NBC se obțin următoarele relații: $\overrightarrow{O_1N} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1M}$ (1) $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2N} + \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2B}$ (2) $\overrightarrow{O_3N} = \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3B} + \overrightarrow{O_3C}$ (3) $\overrightarrow{O_4P} = \overrightarrow{O_4N} + \overrightarrow{O_4B} + \overrightarrow{O_4C}$ (4)	2p
Prin scăderea relațiilor (1) și (2) obținem: $\overrightarrow{O_1N} - \overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2N} - \overrightarrow{O_2A} - \overrightarrow{O_2B}$ de unde $\overrightarrow{O_1N} - \overrightarrow{O_2M} = \left(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AO_2}\right) + \left(\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BO_2}\right) + \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2N}$ De aici $2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, adică $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Analog, prin scăderea relațiilor (3) și (4) se obține că $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{O_3O_4}$. De aici $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$, deoarece MNPQ este pătrat.	3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a X-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autori *Ana-Maria* și *Daniel Petriceanu*

Determinaţi toate funcţiile injective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea
$$2 + f(x+y) = f(f(x)+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $y \to x$ și $x \to y$. Obținem $2 + f(y+x) = f(f(y)+x)$.	2p
Rezultă $f(f(x)+y) = f(f(y)+x)$. Deoarece f este funcție injectivă se obține: $f(x)+y = f(y)+x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.	2p
Pentru $y = 0$ și notând $f(0) = k$ rezultă că $f(x) = k + x, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p
Obținem $2 + k + x + y = f(x) + y + k \Leftrightarrow f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.	1p

Enunţ subiect 2, autor *Constantin Nicolau*, G.M.4/2019

Fie $u, v \in \mathbb{C}$, astfel încât $|u| = |v|$ şi $2|u+v| \geq |u+3v|$. Să se arate că $u = v$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $v = 0$, atunci, evident $u = v = 0$.	1p
Dacă $v \neq 0$, fie Dacă $z = \frac{u}{v}$. Condițiile devin $|z| = 1$ și $2|z+1| \geq |z+3|$	1p
Ridicând inegalitatea la pătrat, vom obține succesiv $4(z+1)(\bar{z}+1) \geq (z+3)(\bar{z}+3) \Leftrightarrow z + \bar{z} \geq 2$. (1)	3p
Dacă $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ atunci (1) $\Leftrightarrow a \geq 1$. Însă $a^2 + b^2 = 1$ (2).	1p
Din (2) obținem $a = 1$ și deci $b = 0$, adică $z = 1$.	1p

Enunţ subiect 3, autor *Eugen Radu*

Rezolvaţi ecuaţia $5 + log_{12}\frac{x}{x^3+16} = x + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Condiția de existență $x > 1$.	1p
Din inegalitatea mediilor avem $x + \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 1 + (x-1) + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq$ $1 + +3\sqrt[3]{(x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = 4 \quad (1)$	2p
Egalitate pentru $x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x = 2$	1p
Dar $x^3 + 16 = x^3 + 8 + 8 \geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot 8\cdot 8} = 12x$, deci $\frac{x}{x^3+16} \leq \frac{1}{12}$, de unde rezultă că $5 + log_{12}\frac{x}{x^3+16} \leq 4$. $\quad (2)$	2p
Din (1) și (2) rezultă $x = 2$, care verifică ecuația dată.	1p

Enunţ subiect 4, autor *Mihail Bălună*

Rezolvaţi ecuaţia $cos^5 x\, cos\, 5x - sin^5 x\, sin\, 5x = 1$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ecuația se poate scrie echivalent $$cos^2 x\,(1 - cos^3 x\, cos\, 5\, x) + sin^2 x\,(1 + sin^3 x\, sin\, 5\, x) = 0$$ Deoarece $cos^2 x\,(1 - cos^3 x\, cos\, 5\, x) \geq 0$ şi $sin^2 x\,(1 + sin^3 x\, sin\, 5\, x) \geq 0$ iar $sin^2 x$ şi $cos^2 x$ nu pot fi simultan 0, egalitatea precedentă se realizează doar în cazurile:	2p
I) $cos\, x = 0$ şi $sin^3 x\, sin\, 5\, x = -1$, situaţie în care nu obţinem nicio soluţie, deoarece soluţiile primei ecuaţii nu o verifică şi pe a doua;	1p
II) $sin\, x = 0$ şi $cos^3 x\, cos\, 5\, x = 1$, situaţie în care obţinem soluţiile $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;	2p
III) $cos^3 x = cos\, 5\, x = \pm 1$ şi $sin^3 x = -\, sin\, 5\, x = \pm 1$, situaţie în care nu obţinem nicio soluţie, deoarece $cos\, x = \pm 1 \Rightarrow sin\, x = 0$.	1p
În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a XI-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1a) , autor ***

Determinaţi toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuaţia $X^3 - 3X^2 + 3X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ecuația devine $(X - I_2)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Notăm $Y = X - I_2 \Longrightarrow Y^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	1p
$det(Y^3) = 0 \Longrightarrow det(Y) = 0$. Din teorema Hamilton-Cayley avem: $Y^2 - tY = O_2$ $\Longrightarrow Y^2 = tY \Longrightarrow Y^3 = t^2Y$	1p
Așadar $t^2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow Tr(t^2Y) = 5 \Longrightarrow t^3 = 5 \Longrightarrow t = \sqrt[3]{5} \quad (t \in \mathbb{R})$ $\Longrightarrow Y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	1p
Obținem $X = I_2 + Y = I_2 + \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.	1p

Enunț subiect 1b), autor *S. Moldoveanu*

În mulţimea $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, vom spune că o matrice este simplă dacă pe fiecare linie a sa, între orice două elemente egale cu 1 nu avem niciun element egal cu 0. Demonstraţi că orice matrice simplă are determinantul -1, 0 sau 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Vom demonstra afirmația prin inducție matematică. Verificarea cazului n=2	1p
Presupunem că orice matrice simplă cu j linii și j coloane are determinantul 0, 1 sau -1 și demonstrăm că orice matrice simplă cu j+1 linii și j+1 coloane are determinantul din aceeași mulțime. Dacă în matricea cu j+1 linii în prima coloană avem numai 0, atunci determinantul său este 0.	2p

Dacă avem cel puțin un element egal cu 1 în prima coloană, vom considera numai liniile care încep cu 1. Dintre acestea vom alege linia care are cele mai puține elemente egale cu 1 și o vom scădea din celelalte linii care încep cu 1 (dacă avem două linii care au același număr minim de valori 1, determinantul este 0). Rezultă că determinantul matricei inițiale este ± 1 înmulțit cu determinatul unei matrice simple cu j linii și j coloane. De aici rezultă concluzia.	

Enunţ subiect 2, autori *Gheorghe Alexe, George-Florin Șerban* , GM 5/2019

Matricele $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{C})$ verifică $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{2A} + \boldsymbol{3B}$. Să se arate că $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{rang}(\boldsymbol{B})$ și că matricele $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{3I_n}$ și $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{2I_n}$ sunt inversabile.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$AB = 2A + 3B \Leftrightarrow AB - 2A - 3B + 6I_n = 6I_n \Leftrightarrow (A - 3I_n)(B - 2I_n) = 6I_n$, de unde aflăm că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.	3p
$AB = 2A + 3B \Leftrightarrow AB - 2A = 3B \Leftrightarrow A(B - 2I_n) = 3B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{3}(B - 2I_n)\right) = B$	2p
Cum matricea $\frac{1}{3}(B - 2I_n)$ este inversabilă, deducem $rang(A) = rang(B)$.	2p

Enunţ subiect 3, autor *George-Daniel Zidu*

Considerăm șirul $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $\boldsymbol{x_1} \in [-2; 2]$ și $\boldsymbol{x_{n+1}} = \frac{3x_n+7}{x_n+3}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. Să se stabilească dacă există $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}$, pentru care șirul $(\boldsymbol{y_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $\boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{n^p}(\sqrt{7} - \boldsymbol{x_n})$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ să fie convergent către un număr real nenul.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se arată prin inducție: $x_n \in [1; \sqrt{7})$, $\forall n \geq 2$. $x_1 \in [-2; 2] \Leftrightarrow \frac{2}{x_1+3} \in \left[\frac{2}{5}; 2\right] \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x_1+3} \in \left[1; \frac{13}{5}\right] \Leftrightarrow x_2 \in \left[1; \frac{13}{5}\right] \subset [1; \sqrt{7})$. Pentru $x_n \in [1; \sqrt{7})$ avem $\frac{2}{x_n+3} \in \left(3 - \sqrt{7}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x_n+3} \in \left[\frac{5}{2}; \sqrt{7}\right)$, de unde $x_{n+1} \in [1; \sqrt{7})$. De aici deducem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit.	2p
Pentru monotonie: $x_{n+1} - x_n = \frac{3x_n+7}{x_n+3} - x_n = \frac{3x_n+7-x_n^2-3x_n}{x_n+3} = \frac{7-x_n^2}{x_n+3} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător. Din Weierstrass, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și are limita $\sqrt{7}$.	2p

Avem $y_n = n^p\left(\sqrt{7} - x_n\right) = \frac{n^p}{\frac{1}{\sqrt{7}-x_n}}$. Admitem că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și notăm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in \mathbb{R}^*$. Șirul $z_n = \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}$ este strict crescător și nemărginit.	1p
Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{\frac{1}{\sqrt{7}-x_{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right)}{\frac{1}{\sqrt{7}-\frac{3x_n+7}{x_n+3}} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\frac{x_n+3}{x_n\sqrt{7}+3\sqrt{7}-3x_n-7} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{pn^{p-1}}{\frac{x_n+3}{(\sqrt{7}-x_n)(3-\sqrt{7})} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{pn^{p-1}(\sqrt{7}-x_n)(3-\sqrt{7})}{\sqrt{7}+x_n} = \frac{pl(3-\sqrt{7})}{2\sqrt{7}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Din Stolz-Cesaro va trebui ca $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, adică $l = 0$, de unde aflăm că nu există p cu proprietatea cerută. Obs. În rezolvarea cerinței se poate utiliza criteriul cleștelui.	2p

Enunț subiect 4, autori *Ana-Maria* și *Daniel Petriceanu*

Fie $x_n = \{\sqrt{n-1}\} + \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are un subșir cu limita 1.

b) Demonstrați că $\forall L \in [0, 3]$, există un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita L.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $x_{4n^2} = \{\sqrt{4n^2-1}\} + \{\sqrt{4n^2}\} + \{\sqrt{4n^2+1}\} = \sqrt{4n^2-1} - (2n-1) + \sqrt{4n^2+1} - 2n =$	1p
$= \frac{4n^2-1-4n^2}{\sqrt{4n^2-1}+2n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} \longrightarrow 1$	1p
b) Fie $a, b \in [0; 3), a < b$ și $k > max\left\{\frac{3}{b-a}; \frac{b^2}{6(3-b)}\right\}$. Alegem $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[\sqrt{n-1}] = [\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] = k \Leftrightarrow k^2 + 1 \leq n < (k+1)^2 - 1$.	1p
Demonstrăm că $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < x_n < b$. $a < \{\sqrt{n-1}\} + \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} < b \Leftrightarrow a < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 3k < b$ $\Leftrightarrow a + 3k < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < b + 3k$. Avem $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 3\sqrt{n}$. Punem condiția $3\sqrt{n} < b + 3k \Leftrightarrow n < \left(\frac{b+3k}{3}\right)^2$ Avem $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 3\sqrt{n-1}$. Punem condiția $3\sqrt{n-1} > a + 3k \Leftrightarrow n > 1 + \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2$. Deoarece $\left(\frac{b+3k}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow$ $b^2 - a^2 + 6k(b-a) > 18$, este adevărată pentru că știm $k > \frac{3}{b-a}$. Deci $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 < n < \left(\frac{b+3k}{3}\right)^2$. (1)	2p
Deoarece $k^2 + 1 \leq n < (k+1)^2 - 1$, demonstrăm că valorile lui n, determinate în relația (1), verifică aceste inegalități: $k^2 + 1 \leq \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow$ a≥ 0 adevărată.	2p

$\left(\frac{b+3k}{3}\right)^2 < (k+1)^2 - 1 \Leftrightarrow k > \frac{b^2}{6(3-b)}$ adevărată. Așadar, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < x_n < b$. Am demonstrat că $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este densă în $[0,3]$, deci $\forall L \in [0,3], \exists \left(x_{k_n}\right)_n \subset (x_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = L$.	

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a XII-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor *Constantin Nicolau* GM 6-7-8/2019

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 x^4\cos\frac{x}{n}\,dx.$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\int_0^2 x^4\cos\frac{x}{n}dx = \frac{32}{5} - 2\int_0^2 x^4\sin^2\frac{x}{2n}dx$	2p
Avem $0 \le x^4\sin^2\frac{x}{2n} \le \frac{x^6}{4n^2}, \forall x \in [0;2] \Rightarrow 0 \le \int_0^2 x^4\sin^2\frac{x}{2n}dx \le \frac{2^7}{28n^4}$	3p
$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 x^4\sin^2\frac{x}{2n}dx = 0$	1p
Obținem că există $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 x^4\cos\frac{x}{n}dx = \frac{32}{5}$	1p

Enunţ subiect 2, autori *Ana-Maria si Daniel Petriceanu*

Determinaţi toate funcţiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **care verifică condiţiile** $f \in \int g(x)\,dx$ **şi** $g \in \int f(x)\,dx$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $f'(x) = g(x)$ si $g'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	2p
Obținem $f'(x) + g'(x) = f(x) + g(x) \Leftrightarrow \left(f'(x) + g'(x)\right)e^{-x} - \left(f(x) + g(x)\right)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left(f(x) + g(x)\right)e^{-x} = c_1 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = c_1e^x$	2p
Pe de altă parte avem: $f'(x) - g'(x) = g(x) - f(x) \Leftrightarrow \left(f'(x) - g'(x)\right)e^x + \left(f(x) - g(x)\right)e^x = 0 \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left(f(x) - g(x)\right)e^x = c_2 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c_2e^{-x}$	2p
Soluția căutată este $f(x) = \frac{c_1e^x + c_2e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{c_1e^x - c_2e^{-x}}{2}$.	1p

Enunț subiect 3

a) autori *Costel Chiteș si Stelian Fedorca*

În inelul matricelor $(M_4(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2020 & 582 & 860 & 870 \\ 1962 & 603 & 342 & 1011 \\ 3444 & 102 & 502 & 48 \\ 228 & 972 & 708 & 51 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,5}}.$$

Fie $\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})_{i,j\in\overline{1,5}}$ matricea A redusă modulo 5. Demonstraţi că $\widehat{A}$ este inversabilă şi calculaţi inversa sa.

b) autori *Ana-Maria si Daniel Petriceanu*

Fie $A = \{x^2 - xy + 4y^2 | x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$. Demonstraţi că A este grup abelian în raport cu înmulţirea numerelor.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $det\,\hat{A} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deducem că matricea $\hat{A}$ este inversabilă.	1p
Obținem $\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{4} & \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{4} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$	2p
b) Fie $u, v \in A$, atunci $u = x^2 - xy + 2y^2$ și $v = a^2 - ab + 2b^2, (a; b) \neq (0; 0)$ *și* $(x; y) \neq (0; 0), x, y, a, b \in \mathbb{Q}$ Definim matricele X= $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x-y \end{pmatrix}$ și Y= $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}$. Avem $uv = (det\,X)(det\,Y) = \det(XY) = (ax - 2by)^2 - (ax - 2by)(ay + bx - by) + 2(ay + bx - by)^2$ $(ax - by, ay + bx - by) \neq (0; 0)$ Deducem că $uv \in A$.	2p
Avem $\frac{1}{u} = \frac{1}{det\,X} = det\,X^{-1}$. *Deoarece* $X^{-1} = \frac{1}{\det X}\begin{pmatrix} x-y & -y \\ 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-n & -n \\ 2n & m \end{pmatrix}$, atunci $\frac{1}{u} = m^2 - mn + 2n^2, (m, n) \neq (0; 0)$. Deducem că $\frac{1}{u} \in A$. Am obținut că A este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, deci $(A; \cdot)$ este grup abelian.	2p

Enunț subiect 4, *Costel Chiteș*

Fie A=$\{f | f: [0; 1] \to \mathbb{R}, f$ *continuă*$\}$.Vom considera că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.

a) **(3p) Demonstraţi echivalenţa „$f \in A$ este divizor al lui zero dacă şi numai dacă există un interval nevid şi deschis $I \subset [0; 1]$ pentru care $f(x) = 0, \forall x \in I$”**

b) **(4p) In subinelul $B = \{f | f: [0; 1] \to \mathbb{R}, f$ *derivabilă*$\}$ determinaţi o pereche de funcţii $g, h \in B$, g, h neidentic nule astfel încât $g \cdot h = 0$.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) f este divizor al lui 0$\Leftrightarrow \exists g \in A\ astfel$ încât $g \neq 0$ și $fg = 0$. Deoarece $g \neq 0$, atunci $\exists a \in [0;1]$ astfel încât $g(a) \neq 0$	1p
Din continuitatea lui g rezultă că $\exists U \in V(a)$ pentru care $g(x) \neq 0\ \forall x \in U \cap [0;1]$. Am obținut că $\exists I \subset [0,1]$, I interval deschis astfel încât $g(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Din condiția inițială rezultă $f(x) = 0, \forall x \in I$. Se construiește g pentru implicația reciprocă.	1p 1p
b) Considerăm $0 < a < b < c < d < 1$ și $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}, & x \in (a;b) \\ 0, & x \in [0;a] \cup [b;1] \end{cases}$ și $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-c)(x-d)}}, & x \in (c;d) \\ 0, & x \in [0;c] \cup [d;1] \end{cases}$	2p
Verificăm derivabilitatea funcțiilor g, h. g este derivabilă pe $[0;1] \setminus \{a;b\}$ și h este derivabilă pe $[0;1] \setminus \{c;d\}$. $g'_s(a) = 0$ și $g'_d(a) = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}}{x-a} = 0$. Așadar g este derivabilă în $x = a$. Analog g este derivabilă în b și h în c și d, iar funcțiile g, h verifică condițiile cerute.	2p