Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie a un număr real strict pozitiv. Determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - (a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

când f parcurge mulţimea funcţiilor concave $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, cu $f(0) = 1$.

Soluţie. Fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie concavă, astfel încât $f(0) = 1$. Cum

$$x^a f(x) + 1 - x^a = x^a f(x) + (1 - x^a) f(0) \le f\big(x^a \cdot x + (1 - x^a)\cdot 0\big) = f(x^{a+1}),$$

prin înmulţire cu $(a+1)x^a$, rezultă

$$(a+1)x^{2a} f(x) + (a+1)(x^a - x^{2a}) \le (a+1)x^a f(x^{a+1}),$$

oricare ar fi x în $[0,1]$. **2p**

Integrând pe intervalul $[0,1]$, obţinem

$$(a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x + (a+1)\int_0^1 (x^a - x^{2a})\,\mathrm{d}x \le (a+1)\int_0^1 x^a f(x^{a+1})\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$(a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2a+1} \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

.... **2p**

Cum $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{1}{4}$, obţinem

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - (a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x \ge = \frac{a}{2a+1} - \frac{1}{4} = \frac{2a-1}{8a+4}.$$

.... **1p**

Cum funcţia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, este concavă, $f(0) = 1$ şi

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - (a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a-1}{8a+4},$$

rezultă că minimumul cerut este $(2a-1)/(8a+4)$. **2p**

Problema 2. Fie n un număr întreg par, $n \geq 4$, şi fie G un subgrup de ordin n al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că G are un subgrup H, astfel încât $\{I_2\} \subsetneq H \subsetneq G$ şi $XYX^{-1} \in H$, oricare ar fi $X \in G$ şi oricare ar fi $Y \in H$.

Soluţie. Mulţimea $H = \{X \mid X \in G, \det X = 1\}$ conţine matricea unitate I_2 şi este multiplicativ stabilă, deci este un subgrup al lui G. **1p**

Dacă $\{I_2\} \subsetneq H \subsetneq G$, atunci subgrupul H are proprietatea cerută. **1p**

Dacă $H = \{I_2\}$, atunci oricare două matrice X şi Y din G comută, deoarece determinantul comutatorului $XYX^{-1}Y^{-1}$ este 1. Considerând o matrice X de ordin 2 în G, subgrupul format din I_2 şi X are proprietatea cerută. **2p**

În fine, dacă $H = G$, considerând din nou o matrice X de ordin 2 în G, rezultă $(\operatorname{tr} X) \cdot X = 2I_2$, deci $(\operatorname{tr} X)^2 = 4$. Cum $X \neq I_2$, rezultă $\operatorname{tr} X = -2$, deci $X = -I_2$. În mod evident, subgrupul lui G format din $\pm I_2$ are proprietatea cerută. **3p**

Simpla afirmaţie că, dacă $-I_2$ este în G, atunci subgrupul format din $\pm I_2$ are proprietatea cerută în enunţul problemei, este notată **1 punct**.

Problema 3. Fie $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcţie crescătoare şi fie $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, astfel încât g'' este continuă şi $g''(x) + f(x)g(x) = 0$, oricare ar fi numărul real $x \geq 0$.

(a) Daţi un exemplu de funcţii f şi g, care îndeplinesc condiţiile din enunţ şi g este neidentic nulă.

(b) Arătaţi că funcţia g este mărginită.

Soluţie. (a) Funcţiile $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = 1$, şi $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$, îndeplinesc condiţiile din enunţ. **1p**

(b) Rescriem condiţia din enunţ sub forma $g'(x)g''(x)/f(x) + g(x)g'(x) = 0$, oricare ar fi $x \geq 0$. Fie $t > 0$. Integrând pe intervalul închis $[0,t]$, obţinem

$$2\int_0^t \frac{g'(x)g''(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + (g(t))^2 - (g(0))^2 = 0.$$

.... **2p**

Funcţia $x \mapsto 1/f(x)$, $x \geq 0$, este descrescăroare şi ia valori strict pozitive. Conform teoremei de medie, există un punct θ între 0 şi t, astfel încât

$$\int_0^t \frac{g'(x)g''(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{f(0)}\int_0^\theta g'(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(g'(\theta))^2 - (g'(0))^2}{2f(0)}.$$

.... **3p**

Prin urmare,

$$(g(t))^2 = (g(0))^2 + \frac{(g'(0))^2}{f(0)} - \frac{(g'(\theta))^2}{f(0)} \leq (g(0))^2 + \frac{(g'(0))^2}{f(0)},$$

deci g este mărginită. **1p**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 3$, şi fie a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n numere complexe nenule, astfel încât $|a_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, şi toţi coeficienţii polinomului $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ să fie întregi. Arătaţi că:

(a) Numerele a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n sunt distincte două câte două;
(b) Dacă a_i, a_j, a_k sunt în progresie geometrică, atunci $i = j = k$.

Soluţie. **(a)** Fie $f = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. Cum $a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^n f(0)$, rezultă că $f(0) \neq 0$ şi $|a_1 a_2 \ldots a_n| \geq 1$, deci $|a_n| > 1$. **1p**

Presupunem că $f = gh$, unde g şi h sunt polinoame monice neconstante cu coeficienţi întregi. Cum a_n este rădăcină simplă lui f, putem presupune că $g(a_n) = 0$ şi $h(a_n) \neq 0$. Fie $m = \deg h$ şi fie a_{i_1}, ..., a_{i_m} rădăcinile lui h. Cum h este monic, rezultă că $|h(0)| = |a_{i_1} \ldots a_{i_m}| < 1$, deci $h(0) = 0$, în contradicţie cu $f(0) \neq 0$. Aşadar, f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$, deci şi în $\mathbb{Q}[X]$, de unde rezultă că f nu are rădăcini multiple. **2p**

(b) Presupunem că există a_p, a_q, a_r în progresie geometrică, nu toate egale. Cum $|a_n| > 1$ şi $|a_i a_n| > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că p, q, $r < n$.

Fie $g = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n}(X - a_i a_j)$. Coeficienţii lui g sunt expresii simetrice în a_1, a_2, ..., a_n, deci sunt întregi. Dacă $a_q^2 = a_p a_r$, atunci $q \neq p$ şi $q \neq r$, deci a_q^2 este rădăcină dublă a lui g. **2p**

Cum g este monic şi are toţi coeficienţii întregi, există un polinom monic h de grad minim cu coeficienţi întregi, astfel încât $h(a_q^2) = 0$. Rezultă că g este divizibil cu h^2.

Cum $|a_q^2| < 1$ şi $|h(0)| \geq 1$, rezultă că h are o rădăcină complexă a de modul strict mai mare decât 1. .... **1p**

Din $h^2 \mid g$, rezultă că a este rădăcină dublă lui g, în contradicţie cu faptul că singurele rădăcini ale lui g de modul supraunitar sunt $a_i a_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, care sunt rădăcini simple.
.... **1p**