Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Demonstraţi că, dacă $x, y \geq 1$, atunci $x+y-\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy}-\frac{2}{\sqrt{xy}}$.

b) Demonstraţi că, dacă $a, b, c, d \geq 1$ şi $abcd = 16$, atunci $a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 6$.

Soluţie şi barem de corectare

a) Inegalitatea se scrie echivalent $(xy-1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$. **3p**

b) Scriind inegalitatea de la a) mai întâi pentru a şi b, apoi pentru c şi d, obţinem $a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}$ şi $c+d-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 2\sqrt{cd}-\frac{2}{\sqrt{cd}}$. Adunând aceste două inegalităţi obţinem $a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{cd}}\right)$. **2p**

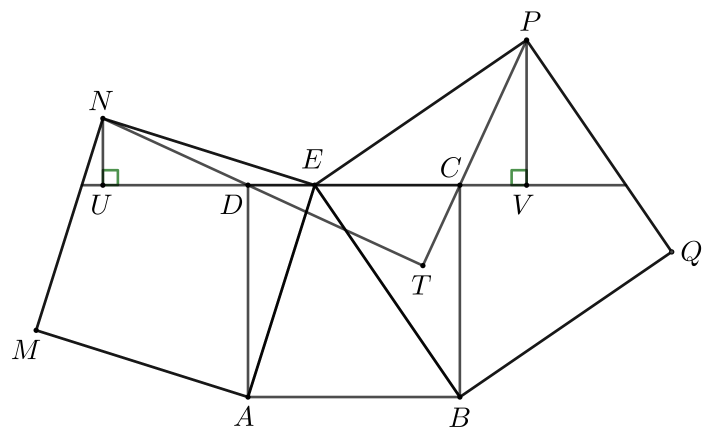
Aplicând acum inegalitatea de la a) pentru $x = \sqrt{ab} \geq 1$ şi $y = \sqrt{cd} \geq 1$ se obţine că $a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}-\frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}}\right) = 6$. **2p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat şi E un punct oarecare pe latura (CD). În exteriorul triunghiului ABE se construiesc pătratele $ENMA$ şi $EBQP$. Demonstraţi că:
a) $ND = PC$;
b) $ND \perp PC$.

Soluţie şi barem de corectare:

a) Fie U şi V proiecţiile punctelor N şi P pe dreapta CD. Triunghiurile dreptunghice NUE şi EDA sunt congruente (IU), deci, dacă notăm $DE = x$, $CE = y$, deducem că $NU = x$, $EU = AD = CD = x+y$ şi $DU = y$. Analog, triunghiurile EPV şi BEC sunt congruente, deci $PV = EC = y$ şi $CV = EV - EC = (x+y)-y = x$. Deducem că triunghiurile NUD şi CVP sunt congruente (CC), prin urmare $ND = PC$. **4p**

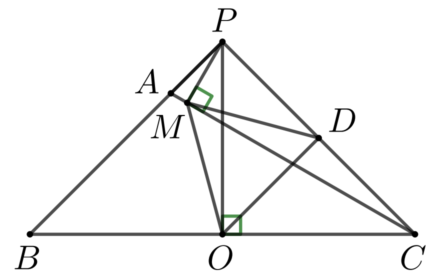
b) Dacă $\{T\} = ND \cap PC$, $m(\angle CDT) + m(\angle DCT) = m(\angle NDU) + m(\angle PCV) = m(\angle NDU) + m(\angle DNU) = 90^\circ$, de unde concluzia. **3p**



Schiţă de soluţie alternativă:
a) Dacă $DE = x$, $CE = y$, atunci $NE^2 = AE^2 = x^2+(x+y)^2$, $PE^2 = BE^2 = y^2+(x+y)^2$. Din teorema cosinusului în triunghiurile NDE şi ECP rezultă $ND^2 = PC^2 = x^2 + y^2$.
b) Tot din teorema cosinusului, dacă $\{T\} = ND \cap PC$, atunci $\cos^2(\angle CDT)+\cos^2(DCT) = \cos^2(\angle NDE) + \cos^2(ECP) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 1$, de unde rezultă că $DT \perp CT$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi în care $m(\angle ABC) = 45^\circ$ şi $m(\angle BAC) > 90^\circ$. Fie O mijlocul laturii $[BC]$. Considerăm punctul $M \in (AC)$ astfel încât $m(\angle COM) = m(\angle CAB)$. Perpendiculara în M pe AC intersectează dreapta AB în punctul P.
a) Aflaţi măsura unghiului $\angle BCP$.
b) Arătaţi că, dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci $PB = 2MO$.

Soluţie şi barem de corectare:
a) Fie P' punctul în care mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează dreapta AB şi M' proiecţia punctului P' pe dreapta AC. Atunci triunghiul $P'BC$ este dreptunghic isoscel. Din teorema catetei obţinem că $P'C^2 = CM' \cdot CA$ şi $P'C^2 = CO \cdot CB$.
Avem aşadar $\dfrac{CM'}{CB} = \dfrac{CO}{CA}$ şi $\angle OCM' = \angle ACB$, deci triunghiurile OCM' şi ACB sunt asemenea. Deducem că $\angle M'OC \equiv \angle BAC \equiv \angle MOC$, ceea ce arată că punctele M şi M' coincid. Atunci şi punctele P şi P' coincid, deci $m(\angle BCP) = m(\angle BCP') = 45^\circ$. ... **5p**
b) Fie D mijlocul segmentului $[PC]$. Dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci obţinem succesiv: $m(\angle ACB) = 30^\circ$, $m(\angle MCP) = 15^\circ$, $m(\angle MDP) = 30^\circ$ şi $m(\angle MDO) = 60^\circ$. În plus, $MD = OD = CD$, deci triunghiul MDO este echilateral, de unde $MO = MD = CD = \frac{PB}{2}$. **2p**



Problema 4. O bucată de hârtie dreptunghiulară 20×19, împărţită în pătrăţele unitate, este tăiată în mai multe bucăţi de formă pătrată, tăieturile făcându-se de-a lungul laturilor pătrăţelelor unitate. O astfel de bucată pătrată se numeşte *pătrat impar* dacă lungimea laturii sale este un număr impar.
a) Care este numărul minim posibil de pătrate impare?
b) Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma perimetrelor pătratelor impare?

Soluţie şi barem de corectare:
a) Dacă notăm cu k numărul bucăţilor pătrate obţinute şi cu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dimensiunile lor, atunci scriind în două moduri aria dreptunghiului obţinem $19 \cdot 20 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$. Deoarece $19 \cdot 20 = 380$ este divizibil cu 4, pătratul unui număr par este un multiplu de 4, iar pătratul unui număr impar este un număr care dă restul 1 la împărţirea cu 4, deducem că numărul bucăţilor pătrate de dimensiune impară trebuie să fie multiplu de 4. .... **1p**
Să observăm în continuare că acest număr nu poate fi 0: la latura de dimensiune 19 nu pot contribui numai pătrate de dimensiune pară. (Alt argument: dacă am colora bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb şi negru astfel încât prima şi ultima coloană să fie negre, am avea cu 20 mai multe pătrăţele negre decât albe, ori un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrăţele albe ca şi negre, deci nu putem avea numai din acestea.) **1p**
Un exemplu cu 4 pătrate de dimensiune impară este uşor de dat: de exemplu decupăm din ultimele 5 coloane 4 bucăţi pătrate 5×5 (acestea sunt cele 4 pătrate de dimensiune impară). Rămâne o bucată dreptunghiulară 20×14 care se poate tăia în bucăţi 2×2. **1p**
b) Colorăm bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb şi negru astfel încât prima şi ultima coloană să fie negre. Vom avea cu 20 mai multe pătrăţele negre decât albe, iar un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrăţele albe ca şi negre. Un pătrat de dimensiune ℓ impară ocupă fie cu ℓ mai multe pătrăţele albe decât negre, fie cu ℓ mai multe pătrăţele negre decât albe. Aşadar suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrăţele negre decât albe trebuie să fie cu 20 mai mare decât suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrate albe decât negre. Rezultă că suma lungimilor pătratelor care acoperă mai multe pătrăţele negre decât albe trebuie să fie cel puţin 20, deci suma dimensiunilor pătratelor de dimensiune impară trebuie să fie cel puţin 20, aşadar suma perimetrelor pătratelor impare este cel puţin 80. .... **3p**
Un exemplu în care suma cerută este chiar 80 este cel dat la a). **1p**