## REZULTATELE SELECTIEI PENTRU ECHIPA ROMANIEI CE VA PARTICIPA LA EGMO 2020

| Nr.crt. | Numele si prenumele | Sub.1 | Sub.2 | Sub.3 | Sub.4 | B1 | B2.1 | B2.2 | B2.3 | B3.1 | B3.2 | B3.3 | Final | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | TIMOFTE ALEXANDRA | 7 | 7 | 6 | 7 | **27** | **7** | **7** | **1** | **7** | **7** | **3** | **59** | EGMO |
| 2 | RÎȘNOVEANU LUCIA | 7 | 7 | 1 | 0 | **15** | **7** | **7** | **1** | **7** | **7** | **4** | **48** | EGMO |
| 3 | ABU SHANAB AMINA | 2 | 5 | 3 | 0 | **10** | **7** | **7** | **1** | **7** | **7** | **2** | **41** | EGMO |
| 4 | POPESCU IOANA | 7 | 1 | 1 | 0 | **9** | **7** | **7** | **2** | **7** | **7** | **1** | **40** | Baraj |
| 5 | ȚOLU DIANA | 3 | 1 | 3 | 0 | **7** | **7** | **7** | **1** | **4** | **7** | **7** | **40** | Baraj |
| 6 | BOGDAN ANA MARIA IULIA | 2 | 7 | 6 | 0 | **15** | **7** | **7** | **0** | **1** | **7** | **2** | **39** | |
| 7 | FLORESCU CELLA | 2 | 2 | 3 | 0 | **7** | **7** | **7** | **1** | **7** | **7** | **0** | **36** | |
| 8 | CRUȚAN EVA | 0 | 5 | 6 | 0 | **11** | **7** | **7** | **0** | **0** | **7** | **2** | **34** | |
| 9 | AXENIE RAISA | 7 | 0 | 0 | 2 | **9** | **7** | **7** | **0** | **3** | **7** | **1** | **34** | |
| 10 | COSTEA TEODORA | 0 | 5 | 6 | 0 | **11** | **7** | **4** | **1** | **0** | **1** | **4** | **28** | |
| 11 | HEDEȘ ANDREEA | 0 | 1 | 6 | 0 | **7** | **7** | **0** | **1** | **3** | **3** | **1** | **22** | |
| 12 | PETRUI CEZARA MARIA | 3 | 5 | 0 | 0 | **8** | **7** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **20** | |
| 13 | OȚEL IOANA BIANCA | 0 | 1 | 6 | 0 | **7** | **2** | **1** | **1** | **3** | **1** | **1** | **16** | |

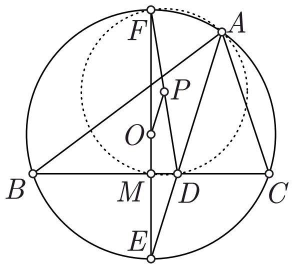
**AL DOILEA TEST DE CALIFICARE PENTRU EGMO 2020**

**București, 18 ianuarie 2020**

**Soluții**

**Problema 1.** În triunghiul scalen $ABC$ notăm cu $O$ centrul cercului circumscris, cu $D$ piciorul bisectoarei din $A$, cu $M$ mijlocul segmentului $BC$ și cu $P$ centrul cercului circumscris triunghiului $ADM$. Arătați că $OP \parallel AD$.

*Olimpiadă Polonia, 2018*




**Soluție.** Fie $F$ mijlocul arcului $\widehat{BAC}$ al cercului $(O)$ și $E$ mijlocul arcului complementar al aceluiași cerc. Atunci $AE \perp AF$ și $MD \perp MF$, deci patrulaterul $ADMF$ este inscriptibil ........ **4p**

În acest patrulater, $DF$ este diametru al cercului său circumscris. Cum $EF$ este diametru al cercului circumscris triunghiului $ABC$, reiese că $OP$ este linie mijlocie în triunghiul $FED$. Deoarece $AD$ trece prin $E$, rezultă concluzia ........ **3p**

**Problema 2.** Fie $n$ un număr natural. Arătați că, dacă $a, b$ sunt numere naturale și $ab = n^2 + n + 1$, atunci $|a - b| \geq 2\sqrt{n}$.

*Olimpiadă Olanda, 2019*

**Soluție**. Observăm că $(a + b)^2 \geq 4ab = 4n^2 + 4n + 4 > (2n + 1)^2$, de unde rezultă $(a + b)^2 \geq (2n + 2)^2$ ........ **4p**

De aici deducem $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab \geq (2n + 2)^2 - 4(n^2 + n + 1) = 4n$, de unde $|a - b| \geq 2\sqrt{n}$ ........ **3p**

**Problema 3.** Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este dat de $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ pentru $n \geq 1$. Determinați termenii șirului care sunt pătrate perfecte.

*George Stoica, Canada*

**Soluție**. Avem $x_n = \frac{1}{2}\left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\right)$ ........ **1p**

Modulo 5, șirul este $1, 2, 2, 1, 2, 2\ldots$, deci pătrate pefecte pot fi doar termenii de forma $x_{3n}$. Deoarece $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$, din formula precedentă deducem $x_n^3 = \frac{1}{8}((2+\sqrt{3})^{3n} + (2 - \sqrt{3})^{3n}) + \frac{3}{8}\left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\right) = \frac{1}{4}x_{3n} + \frac{3}{4}x_n$, deci $x_{3n} = x_n(4x_n^2 - 3)$ ...... **4p**

Singurul factor prim comun posibil al lui $x_n$ și $4x_n^2 - 3$ este 3 dar (inductiv) niciun termen al șirului nu este divizibil cu 3. Deducem că, dacă $x_{3n}$ este pătrat perfect, atunci și $4x_n^2 - 3$ este pătrat perfect. Un raționament de rutină arată că singura posibilitate ca $4x_n^2 - 3 = y^2$, cu $x_n, y \in \mathbb{N}$, este ca $x_n = 1$, deci singurul termen al șirului care este pătrat perfect este $x_0$ ........ **2p**

**AL TREILEA TEST DE CALIFICARE PENTRU EGMO 2020**
**București, 19 ianuarie 2020**
**Soluții**

**Problema 1.** Fie $a$ un număr natural nenul și $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere naturale cu proprietatea $a_n < a_{n+1} \leq a_n + a$, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătați că mulțimea factorilor primi ai termenilor șirului este infinită.

*Olimpiadă Moldova, 1994*

**Soluție.** Să presupunem că factorii primi ai termenilor șirului sunt $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. Alegem $s$ astfel încât $p_1^s > \max\{a, a_1\}$. Fie $A = (p_1 p_2 \ldots p_r)^s$. Atunci cel puțin unul dintre numerele $A+1, A+2, \ldots, A+a$ este termen al șirului; fie acesta $A+k$ ....... **3p**

Avem $A + k = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r}$ și cel puțin unul dintre exponenții $s_1, s_2, \ldots, s_r$ este mai mare ca $s$; fie acesta $s_i$. Rezultă $p_i^{s_i} \mid k$, de unde $p_1^s \leq p_i^{s_i} \leq k \leq a < p_1^s$ – fals ......... **4p**

**Problema 2.** Fie $n \geq 1$ un număr natural. În câte moduri se pot colora cu negru câteva pătrate unitate pe o tablă albă $n \times n$, astfel încât să nu existe două linii având același număr de pătrate colorate și să nu existe două coloane având același număr de pătrate colorate?

*Selim Bahadir, Turcia*

**Soluție**. Fie $\ell_i$, $c_i$ numărul pătratelor colorate de pe linia $i$, respectiv coloana $i$. Atunci $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sunt numerele $0, 1, \ldots, n$, mai puțin un număr $\ell$, iar $c_1, \ldots, c_n$ sunt numerele $0, 1, \ldots, n$, mai puțin un număr $c$. Cum $\sum l_i = \sum c_i$, rezultă $c = l$ .................. **1p**

Dacă există $i$ astfel încât $c_i = n$, atunci $\ell_j \neq 0, \forall j$, deci $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sunt numerele $1, \ldots, n$ (tablă de tip I). În caz contrar, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sunt numerele $0, 1, \ldots, n-1$ (tip II) ....... **2p**

Pentru tablele de tip I, alegerea coloanei $C$ și a liniei $L$ colorate complet se poate face în $n \times n$ moduri, iar tabla rămasă după înlăturarea lui $L$ și $C$ trebuie să fie de tip II. Analog, dacă tabla inițială este de tip II, atunci alegerea coloanei $C$ și a liniei $L$ complet albe se poate face în $n \times n$ moduri, iar tabla rămasă după înlăturarea lui $L$ și $C$ trebuie să fie de tip I. Rezultă că numărul cerut este $2(n!)^2$ (două posibilități de alegere a tipului inițial și apoi, după $k$ pași, $(n-k) \times (n-k)$ posibilități de alegere a liniei și coloanei care se înlătură) ............................................................ **4p**

**Problema 3.** În triunghiul ascuțitunghic $ABC$, cu $AB > AC$, bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie înălțimea $AD$ ($D \in BC$) în $K$, $M$ este proiecția ortogonală a lui $B$ pe $CK$, $BM$ și $AK$ se taie în $N$, iar paralela prin $N$ la $DM$ taie $AC$ în $T$.

Arătați că $BM$ este bisectoarea unghiului $\angle TBC$.

*Melih Üçer, Turcia*

**Soluție**. Punctul $K$ este ortocentrul $\Delta BCN$. Dacă notăm $R = CN \cap AB$, atunci $BK$ este bisectoarea $\angle RBC$ și $BK \perp CR$, deci $\angle BRN = \angle BCN = 180° - \angle BKN$, deci $R$ este pe cercul $(B, K, N) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{C}$ ............................... **2p**

Fie $S$ a doua intersecție a lui $CK$ cu $\mathcal{C}$. Atunci $\angle BSK = \angle BNK = \angle BCK$ și $BM \perp CS$, deci $BM$ este bisectoarea $\angle SBC$. Astfel, cerința este echivalentă cu $B, S, T$ coliniare ................ **2p**

Avem $\angle ANT = \angle KDM = \angle KBM$, deci $NT$ este tangenta în $N$ la $\mathcal{C}$. Folosind teorema lui Pascal pentru hexagonul $BSKNNR$ deducem că $T' = BS \cap NN$, $C = SK \cap NR$ și $A = KN \cap RB$ sunt coliniare, ceea ce arată că $T' = NN \cap AC = T$, c.c.t.d ..................................... **3p**