Olimpiada Naţională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Bucureşti, 13 aprilie 2018

Problema 1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ şi $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = -m$.

Soluţie:
Orice $n \geq 5$ are proprietatea cerută: putem alege $a_1 = 1 - m$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-3} = 0$, $a_{n-2} = -1$, $a_{n-1} = m$, $a_n = 0$.
Numerele $n = 3$ şi $n = 4$ nu au proprietatea cerută.
Pentru $n = 3$, $-2m = 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_3a_1 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ revine la $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2m$, relaţie care nu are loc de exemplu pentru $m = 14$. Într-adevăr, 28 nu se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.
Pentru $n = 4$, $-m = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) = -(a_1 + a_3)^2$ poate avea loc numai pentru m pătrat perfect, deci nu pentru orice m natural.

Remarcă: Teorema celor trei pătrate a lui Legendre spune că un număr natural se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte dacă şi numai dacă nu este de forma $4^a(8b + 7)$ cu $a, b \in \mathbb{N}$. Această teoremă explică alegerea lui $2m = 28$ în soluţia de mai sus.

Problema 2. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 12(x + y + z) = 108$. Aflaţi maximul expresiei x^3y^2z.

Soluţie:
Intuind că maximul se atinge pentru $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, înmulţim egalitatea din enunţ cu 6 şi aplicăm inegalitatea (ponderată a) mediilor:
$6 \cdot 108 = 4x^2 + 4x^2 + 4x^2 + 9y^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12x + 12x + 12x + 12x + 12x + 12x + 18y + 18y + 18y + 18y + 36z + 36z \geq 18 \sqrt[18]{2^{28} \cdot 3^{24} \cdot x^{12} \cdot y^8 \cdot z^4}$, de unde rezultă imediat că maximul cerut este 108 şi se atinge atunci când toate aceste numere sunt egale, adică pentru $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

Problema 3. Triunghiul ABC are proprietatea că există un unic punct $X \in [BC]$ astfel încât $AX^2 = BX \cdot CX$. Demonstraţi că $AB + AC = BC\sqrt{2}$.

Soluţie:
Fie T simetricul lui A faţă de X. Din reciproca teoremei puterii punctului, $ABTC$ este inscriptibil. Dacă paralela prin T intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în U, iar $AU \cap BC = \{Y\}$, atunci $Y \in [BC]$ şi $BY \cdot CY = AY \cdot UY = AY^2$, deci pentru ca punctul X să fie unic este necasar ca $T = U$, adică T să fie mijlocul arcului BC, adică X

să fie piciorul bisectoarei.
De aici se poate finaliza în mai multe moduri, de exemplu cu formula pentru lungimea bisectoarei.
O finalizare simplă e şi cu relaţia lui Stewart:
Notând $AX = \ell$, $BX = x$, $CX = y$, avem $b^2x + c^2y = \ell^2 a + axy$. Se ştie că $x = \dfrac{ac}{b+c}$, $y = \dfrac{ab}{b+c}$. Atunci $\ell^2 = xy \Leftrightarrow b^2x + c^2y = 2axy \Leftrightarrow (b+c)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b + c = a\sqrt{2}$.

Comentariu: Scriind relaţia lui Stewart şi înlocuind $AX^2 = BX \cdot CX$ şi $CX = a - BX$, se ajunge la următoarea ecuaţie în necunoscuta $x = BX$: $f(x) := 2ax^2 - (c^2 + 2a^2 - b^2)x + c^2a = 0$. Cum $f(0) \cdot f(a) > 0$, această ecuaţie are o unică soluţie în $[0, a]$ dacă şi numai dacă $\Delta = 0$ (se verifică că acea soluţie este într-adevăr în $[0, a]$ dacă $\Delta = 0$). Ori $\Delta = (a\sqrt{2} + b + c)(a\sqrt{2} + b - c)(a\sqrt{2} - b + c)(a\sqrt{2} - b - c)$. Singurul factor care se poate anula este $a\sqrt{2} - b - c$.

Problema 4. Pentru $n \geq 2$ considerăm n cutii ordonate de la stînga la dreapta, în care punem câte o bilă ce poate avea una dintre culorile roşu, albastru sau alb, astfel ca să fie îndeplinită condiţia:

Oricare dintre cutii este vecină cu cel puţin una cu bila de aceeaşi culoare.

Notăm cu I_n numărul de astfel de configuraţii.

a) Determinaţi I_{11} justificând răspunsul.

b) Determinaţi cu demonstraţie formula generală pentru I_n.

Soluţie:
Fie a_n numărul de configuraţii care încep cu o culoare fixată, să zicem roşu. E clar că $I_n = 3a_n$

Evident $a_2 = 1, a_3 = 1$. Fie acum $n \geq 4$. Avem bila roşie în prima cutie şi definim $k =$ cea mai mare secvenţă de bile roşii începând cu prima poziţie.

Distingem cazurile:

- $k = 2$; Pe poziţia a doua e o bilă roşie şi pe a treia alb sau albastru, deci două variante. Aceaste configuraţii vor da $2a_{n-2}$.

- $k \geq 3$: Eliminăm prima bilă şi ajungem la situaţia a_{n-1}. Cum cele două tipuri de configuraţii sunt diferie şi le cuprind pe toate avem $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Prin inducţie găsim formula $a_n = \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}$ deci $I_n = 2^{n-1} + (-1)^n$.

Pentru $n = 11$ deducem $a_{11} = 1023$.