Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a VIII-a - Soluţii şi barem

Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} \neq 1.$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Presupunând prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} = 1$ reiese $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \left[\frac{m}{n}\right] - \left[\frac{n}{m}\right] \in \mathbb{N}$, deci $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ şi, simplificând fracţiile, putem presupune $(m, n) = 1$ **1p**

Dacă $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k \in \mathbb{N}$, atunci $n^2 - knm + m^2 = 0$ **1p**

Din relaţia precedentă rezultă că $m \mid n^2$ şi $n \mid m^2$, ceea ce, ţinând cont de $(m, n) = 1$, implică $m = n = 1$. Dar, pentru $m = n = 1$ expresia din enunţ este egală cu 0, deci am obţinut o contradiţie **5p**

Problema 2. Fie $a, b, c \in [1, \infty)$. Demonstraţi că

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

Soluţie. Din inegalitatea mediilor avem $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ şi analoagele, de unde rezultă $\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2}$ **3p**

Vom arăta că $\sqrt{a} \leq 2a - 1$ pentru orice $a \geq 1$. Într-adevăr, relaţia precedentă este echivalentă cu $(2\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1) \geq 0$, relaţie evidentă pentru orice $a \geq 1$ **2p**

Din inegalitatea de mai sus şi analoagele ei obţinem că $\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2} \leq a + b + c$
2p

Problema 3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Notăm cu M, N şi P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[BB']$. Fie $\{O\} = A'N \cap C'M$.

a) Arătaţi că punctele D, O, P sunt coliniare.

b) Arătaţi că $MC' \perp (A'PN)$ dacă şi numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul BAC, deci $MN \parallel AC$ şi $MN = \frac{1}{2}AC$. Cum $AC \parallel A'C'$ şi $AC = A'C'$, rezultă că $MNC'A'$ este trapez şi că $\frac{MO}{OC'} = \frac{NO}{OA'} = \frac{1}{2}$. Dacă notăm $\{O'\} = DP \cap MC'$, analog se arată că $MPDC'$ este trapez şi $\frac{MO'}{O'C'} = \frac{MP}{DC'} = \frac{1}{2}$. Rezultă că punctele O şi O' împart segmentul $[MC']$ în raport $1/2$, deci coincid. Aşadar punctele D, O, P sunt coliniare. **2p**

b) Notăm $AB = 2x, BC = 2y, BB' = 2z$. $C'M \perp (A'PN) \Leftrightarrow C'M \perp A'N$ şi $C'M \perp DP$. Aplicăm succesiv teorema lui Pitagora. În $\triangle C'BC$, $\triangle C'BM$, $\triangle A'BA$,

$\triangle A'BN$, $\triangle DBA$, $\triangle DBP$, $\triangle BMN$, $\triangle DAM$ obţinem $OM^2 = \frac{1}{9}C'M^2 = \frac{1}{9}(4z^2+4y^2+x^2)$, $ON^2 = \frac{1}{9}A'N^2 = \frac{1}{9}(4z^2+4x^2+y^2)$, $OD^2 = \frac{4}{9}DP^2 = \frac{4}{9}(4y^2+4x^2+z^2)$, $MN^2 = x^2+y^2$, $DM^2 = 4y^2+x^2$. Din $C'M \perp A'N$ rezultă că $\triangle MNO$ este dreptunghic în O şi, prin aplicarea teoremei lui Pitagora, $MN^2 = MO^2 + ON^2$ ceea ce conduce la $x^2+y^2 = 2z^2$ (*). La fel, din $C'M \perp DP$, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MDO avem $DM^2 = DO^2 + OM^2$, ceea ce ne conduce la relaţia $x^2+z^2 = 2y^2$ (**). Din (*) şi (**) rezultă $x = y = z$, de unde rezultă că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Problema 4. a) Considerăm numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $a < b < c$ şi $a^2 + b^2 = c^2$. Demonstraţi că dacă $a_1 = a^2$, $a_2 = ab$, $a_3 = bc$, $a_4 = c^2$, atunci $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ şi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

b) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ care verifică relaţiile $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ şi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.

Soluţie. a) Avem $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^4 + a^2b^2 + b^2c^2 = a^2(a^2+b^2) + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)c^2 = c^4$ **1p**

Apoi $a_1 = a^2 < ab = a_2$ (deoarece $a < b$), $a_2 = ab < bc = a_3$ (deoarece $a < c$) şi $a_3 = bc < c^2 = a_4$ (deoarece $b < c$), aşadar $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. **1p**

b) Pentru $n = 3$, un exemplu este $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ ($3 < 4 < 5$ şi $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Pentru $n \geq 4$ putem alege $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $\ldots$, $a_{n-2} = 2n$. Evident, suma $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2$ este impară. Fie $N \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2 = 2N+1$. Atunci $N \geq 3$. Definim atunci $a_{n-1} = N$ şi $a_n = N+1$.

Avem $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = 2N + 1 + N^2 = (N+1)^2 = a_n^2$ şi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$. Toate inegalităţile sunt evidente în afară de penultima: $a_{n-2} \leq \sqrt{2N+1} < N = a_{n-1}$ revine la $N^2 > 2N+1$, adică la $(N-1)^2 > 2$, evident adevărat pentru $N \geq 3$ **5p**