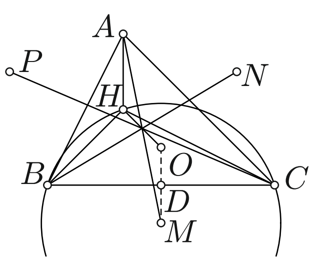
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016
CLASA a 9-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Un triunghi ABC are ortocentrul H diferit de vârfuri şi de centrul O al cercului circumscris. Notăm M, N, P centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB. Demonstraţi că dreptele AM, BN, CP şi OH sunt concurente.



Soluţie. Cercul HBC este simetricul cercului $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului, deci M este simetricul lui O faţă de BC **2p**

Dacă D este mijlocul lui $[BC]$, atunci $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$ **3p**

Rezultă că $AHMO$ este paralelogram, deci AM trece prin mijlocul segmentului $[OH]$, analog BN şi CP **2p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1 \leq a_2$, $a_1 + a_2 \leq a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 \leq a_4, \ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \leq a_n$. Arătaţi că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}.$$

Când are loc egalitatea ?

Soluţie. Notăm $x_1 = a_1$, $x_k = a_k - (a_{k-1} + \ldots + a_1)$, $k = \overline{2,n}$ **2p**

Observăm că $x_{k+1} - x_k = a_{k+1} - 2a_k$, $k = \overline{1,n-1}$ **1p**

Rezultă $2\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}}\right)$ **1p**

Ultima sumă este $n - \frac{x_1}{a_1} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}} = n - \frac{x_n}{a_n} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) \leq n$, deoarece $x_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$ şi $a_i \leq a_{i+1}, \forall i = \overline{1,n-1}$ **2p**

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, adică $a_2 = a_1$, $a_3 = 2a_1, \ldots, a_n = 2^{n-2}a_1$ **1p**

Problema 3. a) Demonstraţi că 7 nu poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raţionale.

b) Fie a un număr raţional care poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raţionale. Arătaţi că a^m poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raţionale, oricare ar fi numărul natural nenul m.

Soluţie. a) Să presupunem că există numerele raţionale x, y, z astfel ca $7 = x^2 + y^2 + z^2$. Scriind x, y, z ca fracţii şi eliminând numitorii, obţinem o egalitate de tipul

$$7n^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad (*)$$

unde n, a, b, c sunt numere naturale, nu toate nule.

Dacă n este par, atunci a, b, c sunt toate pare (nu pot fi toate trei impare, iar dacă exact două sunt impare, suma pătratelor dă restul 2 la împărţirea cu 4, în timp ce $7n^2$ se divide cu 4). Împărţind cu 4, obţinem

$$7n_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

şi evident, $0 < a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c$.

Dacă n_1 este tot par, repetăm procedeul precedent (aceasta se poate întâmpla de un număr finit de ori).

Dacă n este impar, $n = 2k+1$, atunci $7n^2 = 7 \cdot 4k(k+1) + 7 = M8 + 7$. Cum restul unui pătrat la împărţirea cu 8 este 0, 1 sau 4, deducem că egalitatea (*) de mai sus este imposibilă **3p**

b) Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după m. Cazul $m = 1$ rezultă din ipoteză. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru orice $m \le n$ şi să o demonstrăm pentru $n + 1$.

Dacă $n + 1 = 2k$, atunci $k \le n$, deci a^k se scrie ca o sumă de trei pătrate de numere raţionale, de exemplu $a^k = x^2 + y^2 + z^2$, unde $x \ge y \ge z$. Atunci

$$a^{2k} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 - z^2\right) + (2xz)^2 + (2yz)^2,$$

şi numerele $x^2 + y^2 - z^2$, $2xz$, $2yz$ sunt evident raţionale **2p**

Dacă $n + 1 = 2k + 1$, scriind $a = x^2 + y^2 + z^2$, avem

$$a^{n+1} = a^{2k} \cdot a = a^{2k}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \left(a^k x\right)^2 + \left(a^k y\right)^2 + \left(a^k z\right)^2.$$

.... **2p**

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f(a^2) - f(b^2) \le (f(a) + b)(a - f(b)), \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Pentru $a = b = 0$ obţinem $f^2(0) \le 0$, deci $f(0) = 0$ **1p**

Luând în ipoteză $b = 0$, apoi $a = 0$, reiese $f(a^2) \le af(a), \forall a \in \mathbb{R}$ şi $f(b^2) \ge bf(b), \forall b \in \mathbb{R}$, deci $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}(*)$ **1p**

Înlocuind (*) în ipoteză obţinem $f(a)f(b) \le ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Avem şi $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x)$, de unde reiese că f este impară.. **1p**

Din ultimele două relaţii reiese $f(a)f(b) = -f(a)f(-b) \ge -(-ab) = ab$, deci $f(a)f(b) = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Astfel $f^2(1) = 1$, ceea ce implică $f(1) = \pm 1$ şi $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

Ambele funcţii verifică **1p**