



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 și 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătați că:

- indiferent câți pași s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;
- este posibil ca, după mai mulți pași, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Soluție

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma $11a + 13b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă ar exista $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $86 = 11a + 13b$, atunci $b \leq 6$ **1p**

Atunci $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$, deci $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$ **1p**

Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă **1p**

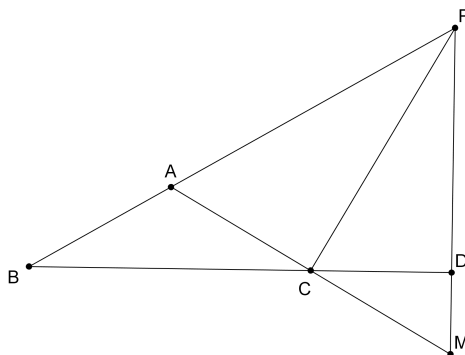
b) $2015 = 11 \cdot 182 + 13$ **1p**

Putem obține numărul 2015 prin 182 de pași astfel:

$$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \dots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015 \dots \text{ 2p}$$

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A față de punctul C și cu P intersecția dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Știind că dreapta PM este perpendiculară pe BC , arătați că triunghiul APM este echilateral.

Soluție



Fie $\{D\} = BC \cap PM$. Notăm $m(\sphericalangle ABC) = x$. Atunci $m(\sphericalangle MCD) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = x$, de unde $m(\sphericalangle PMC) = 90^\circ - x$ **2p**

Cum PC este mediatoarea segmentului $[AM]$, triunghiul PAM este isoscel, deci $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle PAC$ **2p**

Dar $m(\sphericalangle PAC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 2x$.

Rezultă $90^\circ - x = 2x$, de unde $x = 30^\circ$ **2p**
 Atunci $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60^\circ$, deci triunghiul APM este echilateral..... **1p**

Problema 3. Determinați pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

Soluție

Fie \overline{abcd} un pătrat perfect cu $a \neq 0, d \neq 0$, astfel încât \overline{dcba} este pătrat perfect.

Deoarece \overline{dcba} este pătrat perfect, rezultă $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$ **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb55}$ sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb66}$ sunt divizibile cu 2 și nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte..... **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb11}$ sau $\overline{dcb99}$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărțirea cu 4 **2p**

Studiem cazul $a = 4$. Întrucât $209^2 < 44000$ și $213^2 > 45000$, rezultă că $\overline{abcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$.

Cum $210^2 = 44100$ nu are răsturnatul de 5 cifre, $211^2 = 44521$ și $12544 = 112^2$, $212^2 = 44944$, numerele căutate sunt 44521 și 44944 **2p**

Problema 4. Determinați numerele naturale nenule A și B , care au același număr de cifre, știind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde \overline{AB} este numărul obținut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A .

Soluție Fie n numărul de cifre ale lui A și B . Din relația din enunț avem $(2A - 1)B = 10^n A$, de unde $2A - 1 \mid 10^n A$ **1p**

Cum $(2A - 1, A) = 1$ și $(2, 2A - 1) = 1$, rezultă $2A - 1 \mid 5^n$, deci $2A - 1 \leq 5^n$ **2p**

Deoarece A are n cifre, rezultă $A \geq 10^{n-1}$, deci $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$. Obținem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci $2^n \leq 6$, de unde $n \in \{1, 2\}$ **2p**

Pentru $n = 1$, din $2A - 1 \mid 5$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5\}$, deci $A \in \{1, 3\}$. Dacă $A = 1$, avem $B = 10$, care nu convine, deoarece B are o cifră. Dacă $A = 3$, avem $B = 6$ **1p**

Pentru $n = 2$, din $2A - 1 \mid 25$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$, deci $A \in \{1, 3, 13\}$; dar A are două cifre, deci $A = 13$ și $25B = 1300$, deci $B = 52$ **1p**