Testul 1

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, fie A', B', C' proiecţiile ortogonale ale vârfurilor A, B, C pe dreptele BC, CA, respectiv AB, şi X un punct situat pe dreapta AA'. Fie γ_B cercul care trece prin punctele B şi X şi are centrul situat pe dreapta BC, iar γ_C cercul care trece prin punctele C şi X şi are centrul situat pe dreapta BC. Cercul γ_B intersectează a doua oară dreptele AB şi BB' în punctele M, respectiv M', iar cercul γ_C intersectează a doua oară dreptele AC şi CC' în punctele N, respectiv N'. Arătaţi că punctele M, M', N şi N' sunt coliniare.

Problema 2. Arătaţi că, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 2$, există $n+1$ numere x_1, x_2, $\ldots$, x_n, x_{n+1} în $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $\{x_1^3\} + \{x_2^3\} + \cdots + \{x_n^3\} = \{x_{n+1}^3\}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

Problema 3. Fie $A_0A_1A_2$ un triunghi scalen. Determinaţi locul geometric al centrelor triunghiurilor echilaterale $X_0X_1X_2$, astfel încât punctul A_k să se afle pe dreapta $X_{k+1}X_{k+2}$, $k = 0, 1, 2$ (toţi indicii sunt reduşi modulo 3).

Problema 4. Fie k un număr natural nenul şi m un număr natural impar. Arătaţi că există un număr natural nenul n, astfel încât numărul $m^n + n^m$ are cel puţin k factori primi distincţi.

Problema 5. Fie n un număr întreg mai mare sau egal cu 2, fie p un număr întreg mai mare sau egal cu $n+2$ şi S o mulţime finită care are p elemente. O mulţime $\mathcal{A}$ de părţi ale lui S are proprietatea (P), dacă îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:

(a) Fiecare mulţime din $\mathcal{A}$ conţine cel puţin n elemente; şi

(b) Fiecare element din S este conţinut în cel puţin n mulţimi din $\mathcal{A}$.

În acest caz, notăm cu $N(\mathcal{A})$ numărul minim de mulţimi din $\mathcal{A}$, a căror reuniune este S.

Determinaţi valoarea maximă a lui $N(\mathcal{A})$ când $\mathcal{A}$ parcurge colecţia mulţimilor de părţi ale lui S care au proprietatea (P).