Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

SIBIU 2014

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie n un număr natural. Să se afle numerele întregi x, y, z cu proprietatea

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n (x + y + z).$$

Problema 2. Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m şi n sunt numere naturale nenule, atunci

a) $\{m(a+\sqrt{a})\} \neq \{n(a-\sqrt{a})\}$;

b) $[m(a+\sqrt{a})] \neq [n(a-\sqrt{a})]$.

Prin $\{x\}$ şi $[x]$ s-a notat partea fracţionară respectiv partea întreagă a numărului real x.

Problema 3. Fie P şi Q mijloacele diagonalelor BD şi AC ale patrulaterului $ABCD$. Se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $R \in (PQ)$ şi $S \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AS}{SC} = k.$$

Să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN este situat pe segmentul $[RS]$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC. Se ştie că există punctele $E \in (CD)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât dreapta AE e perpendiculară pe DF, iar AF e perpendiculară pe BE.

Să se arate că $AB = AD$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.