Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

SIBIU 2014

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Nagyszeben, 2014. április 8.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Adott az $(A, +, \cdot)$ gyűrű. Minden $a \in A$ esetén értelmezzük az $s_a : A \to A$, $s_a(x) = ax$ és $d_a : A \to A$, $d_a(x) = xa$ fügvényeket.

a) Igazold, hogy ha A véges halmaz, akkor s_a akkor és csak akkor injektív, ha d_a injektív!

b) Adj példát olyan gyűrűre, amely tartalmaz olyan a elemet, amelyre az s_a és d_a függvények közül pontosan egyik injektív!

2. feladat. Adottak az I és J intervallumok. Legyen $\varphi : J \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelynek nincs zérushelye J-ben és $f, g : I \to J$ két deriválható függvény úgy, hogy $f' = \varphi \circ f$ és $g' = \varphi \circ g$.

Igazold, hogy ha létezik $x_0 \in I$ úgy, hogy $f(x_0) = g(x_0)$, akkor az f és g függvények azonosak!

3. feladat. Az $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ folytonos függvény teljesíti a következő tulajdonságokat:

(i) a $g : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ függvénynek van határértéke $+\infty$ felé;

(ii) a $h : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $h(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ függvénynek van határértéke $+\infty$ felé.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

b) Igazold, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

4. feladat. A $(G, \cdot)$ véges csoport semleges eleme e. Tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in G \backslash \{e\}$ és létezik olyan p prímszám, hogy $x^{p+1} = a^{-1}xa$ bármely $x \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy létezik $k \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $\mathrm{ord}(G) = p^k$.

b) Igazold, hogy a $H = \{x \in G \mid x^p = e\}$ halmaz egy részcsoportja G-nek és $(\mathrm{ord}(H))^2 > \mathrm{ord}(G)$.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.