Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

SIBIU 2014

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a X–a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k notăm cu $a(k,n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \le d^2 \le n^2$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n^2} a(k,n)$.

Problema 2. Considerăm funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietăţile:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ pentru orice număr prim p,

c) $f(p_1 p_2 \cdots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \le n^3 \le 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural n, $n \ge 2$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se determine numărul funcţiilor crescătoare $f : A \to A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ pentru orice x, $y \in A$.

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \ge 2$, şi fie numerele complexe a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ cu $a_n \ne 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmaţiile:

P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \le |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,

Q. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ şi $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.