

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale impare consecutive se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive.

Soluție. Justificarea faptului că dintre oricare trei numere naturale impare consecutive unul dintre ele este multiplu de trei. **3p**

Deducem că produsul celor trei numere este multiplu de 3 **2p**

Orice număr de forma $3k, k \in \mathbb{N}^*$ se scrie $3k = (k - 1) + k + (k + 1)$ **2p**

Problema 2. Spunem că unui număr natural n i se aplică o transformare *interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare *deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o transformare *minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16.

a) Arătați că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una *interesantă*, una *deosebită* și una *minunată*, aplicate în această ordine, devine 2020.

b) Determinați numerele naturale care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

Soluție. a) Fie n numărul căutat. Se obține relația $4[3(2n + 4) + 9] + 16 = 2020$ **3p**

Rezultă $n = 80$ **1p**

b) Deoarece o transformare deosebită duce la un multiplu de 3, iar una minunată duce la un multiplu de 4, ultima transformare nu poate fi decât interesantă. **1p**

Numărul obținut după prima transformare este 1005. **1p**

Deoarece 1005 este impar, prima transformare nu poate fi decât deosebită, iar numărul inițial este 332. **1p**

Problema 3. Arătați că există un multiplu al numărului 2013 care se termină în 2014.

Soluție. Considerăm numerele $n_1 = 2014, n_2 = 20142014, n_3 = 201420142014, \dots, n_{2014} = \underbrace{20142014\dots2014}_{2014 \text{ ori}}$ **2p**

Conform principiului cutiei, există cel puțin două dintre cele 2014 numere care dau același rest la împărțirea cu 2013, deci diferența lor se divide cu 2013. **2p**

Fie aceste numere $n_i, n_j, i > j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$.

Obținem $n_i - n_j = \underbrace{20142014\dots2014}_{(i-j) \text{ ori}} \underbrace{00\dots0}_{4j \text{ ori}}$ **1p**

Cum orice putere a lui 10 este relativ primă cu 2013, rezultă că $n = \underbrace{20142014\dots2014}_{(i-j) \text{ ori}}$ se divide cu 2013. **2p**

Problema 4. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conține cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, 10, ..., 100 conțin, în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii?

Soluție.

Numerele de bile din două cutii vecine diferă prin 1, deci două cutii vecine pot conține, n total, cel mult $10 + 9 = 19$ bile. **1p**

Cutiile $(2, 3), (5, 6), \dots, (98, 99)$ pot conține, în total, cel mult $33 \cdot 19 = 627$ bile, deci numărul total de bile din cele 100 de cutii nu poate depăși $627 + 301 = 928$ **3p**

Există o modalitate de așezare a 928 bile astfel încât să fie satisfăcute cerințele problemei. De exemplu, este convenabilă următoarea modalitate de distribuție a bilelor:

$$\underbrace{[9\ 10\ 9\ 8\ 9\ 10] \dots [9\ 10\ 9\ 8\ 9\ 10]}_{10 \text{ grupe}} \quad \underbrace{[9\ 10\ 9\ 10\ 9\ 10] \dots [9\ 10\ 9\ 10\ 9\ 10]}_{6 \text{ grupe}} \quad [9\ 10\ 9\ 8]$$

..... **3p**

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*