Testul 1

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi a_n, b_n, c_n numere întregi, astfel încât $(\sqrt[3]{2}-1)^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}$. Să se arate că $c_n \equiv 1 \pmod{3}$ dacă şi numai dacă $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Problema 2. Fie Ω şi ω două cercuri tangente interior în punctul P, cercul ω fiind situat în interiorul cercului Ω. Fie AB o coardă a cercului Ω, tangentă în punctul C la cercul ω. Dreapta CP intersectează a doua oară cercul Ω în punctul Q. Cele două tangente din punctul Q la cercul ω intersectează din nou cercul Ω în punctele R, respectiv S. Fie I, X, Y centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABP, ABR, respectiv ABS. Să se arate că $\angle IXP + \angle IYP = 90^\circ$.

Problema 3. Să se determine funcţiile injective $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, care au următoarea proprietate: dacă S este o mulţime finită de numere naturale nenule, astfel încât $\sum_{s\in S} 1/s$ este un număr întreg, atunci şi $\sum_{s\in S} 1/f(s)$ este un număr întreg.

Problema 4. Mulţimea S a diagonalelor unui poligon convex cu $4n-1$ laturi, $n \geq 2$, este partiţionată în $k \geq 2$ mulţimi $S_1, \ldots, S_k$, astfel încât, oricare ar fi i şi j doi indici distincţi, există o diagonală în S_i şi una în S_j, care au un punct interior comun. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui k în funcţie de n.