



Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

VIII. OSZTÁLY

1. feladat. Az $ABCA'B'C'$ szabályos egyenes hasámban $AB = a$. Tudjuk, hogy egyetlenegy olyan $M \in (BB')$ pont létezik, amelyre $m(\angle AMC') = 90^\circ$.

Határozd meg az AM egyenes és az (ACC') sík szögének mértékét!

2. feladat. Egy végtelen méretű sakktáblán egy bástyával lépegetünk függőleges és vízszintes irányban felváltva (minden lépésnél irányt vált a bástya). Az első lépésben egy négyzetnyit halad a bástya, a második lépésnél két négyzetnyit, és így tovább, az n -edik lépésnél n négyzetnyit halad bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Legyen T azon n természetes számok halmaza, amelyekre létezik n darab lépésből álló lépéssorozat, amelyekkel a bástya visszakerül az eredeti helyére.

a) Igazold, hogy $2013 \notin T$.

b) Határozd meg a $T \cap \{1, 2, \dots, 2012\}$ halmaz elemeinek számát!

3. feladat. Határozd meg az $x > 0$ valós számot és az n nem nulla természetes számot, ha fennáll az

$$[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1,005 \cdot n.$$

egyenlőség!

Megjegyzés: $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli.

4. feladat. Egy valós számokból álló M halmazt nevezzünk *speciálisnak*, ha egyidőben teljesíti a következő tulajdonságokat:

(i) bármely $x, y \in M$, $x \neq y$, esetén az $x + y$ és xy számok közül egyik sem nulla és pontosan egyik racionális;

(ii) bármely $x \in M$ esetén x^2 irracionális.

Maximum hány elemet tartalmazhat egy speciális halmaz?

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.