Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

CLASA a VIII-a

Problema 1. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = a$, are proprietatea că există un unic punct $M \in (BB')$ astfel încât $m(\sphericalangle AMC') = 90°$.

Determinaţi măsura unghiului format de dreapta AM cu planul (ACC').

Problema 2. Pe o tablă de şah de dimensiuni infinite se mută o tură, alternativ pe orizontală şi pe verticală. Tura se deplasează un pătrăţel la prima mutare, două pătrăţele la a doua mutare şi, în general, n pătrăţele la a n-a mutare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie T mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea că există un şir de n mutări după care tura revine la poziţia iniţială.

a) Arătaţi că $2013 \notin T$.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $T \cap \{1, 2, .., 2012\}$.

Problema 3. Determinaţi numărul real $x > 0$ şi numărul natural nenul n pentru care

$$[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1,005 \cdot n.$$

Notă: $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ partea fracţionară a numărului real a.

Problema 4. Numim *specială* o mulţime M de numere reale cu proprietăţile:

(i) pentru orice $x, y \in M$, $x \neq y$, numerele $x + y$ şi xy sunt nenule, exact unul dintre ele fiind raţional;

(ii) pentru orice $x \in M$, numărul x^2 este iraţional.

Aflaţi numărul maxim de elemente ale unei mulţimi speciale.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.