Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Az n-edrendű, nem invertálható A négyzetes mátrix elemei valós számok. ($n \geq 2$). Legyen A^* az A mátrix adjungáltja. Igazold, hogy $I_n + A^*$ akkor és csak akkor invertálható, ha $\operatorname{tr}(A^*) \neq -1$.

2. feladat. Adottak az $m \geq 2$ és $n \geq 2$ természetes számok és az A_1, $A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nem mind nilpotens mátrixok. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $k > 0$ egész szám, amelyre $A_1^k + A_2^k + \cdots + A_m^k \neq O_n$.

Megjegyzés: Egy négyzetes mátrix nilpitens, ha van olyan hatványa, ami nullmátrix.

3. feladat. Az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ függvényt nevezzük *kontraktibilisnek*, ha bármely $x, y \in (0, \infty)$ számok esetén $\lim\limits_{n \to \infty} (f^n(x) - f^n(y)) = 0$, ahol $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

a)Legyen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ egy olyan folytonos, kontraktibilis függvény, amelynek van fixpontja, azaz létezik $x_0 \in (0, \infty)$úgy, hogy $f(x_0) = x_0$. Igazold, hogy $f(x) > x$, bármely $x \in (0, x_0)$ esetén és $f(x) < x$, bármely $x \in (x_0, \infty)$ esetén!

b) Igazold, hogy az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ kontraktibilis, de nincs fixpontja.

4. feladat. a) Az $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ függvény deriválható és konvex. Igazold, hogy ha $f(x) \leq x$, bármely $x \geq 0$ esetén, akkor $f'(x) \leq 1$, bármely $x \geq 0$ esetén!

b) Határozd meg azokat a deriválható és konvex $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ függvényeket, amelyekre $f(0) = 0$ şi $f'(x) \cdot f(f(x)) = x$, bármely $x \geq 0$ esetén!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.