



Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Oldd meg a következő egyenletet:

$$2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x.$$

2. feladat. Adottak az a, b, c, d különböző komplex számok. Igazold, hogy a következő állítások egyenértékűek:

i) Bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén fennáll a $|z - a| + |z - b| \geq |z - c| + |z - d|$ egyenlőtlenség!

ii) Létezik $t \in (0, 1)$ úgy, hogy $c = ta + (1 - t)b$ és $d = (1 - t)a + tb$.

3. feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektív függvényt, amelyre bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén fennáll a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

egyenlőtlenség!

4. feladat. a) Igazold, hogy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} < m,$$

bármely $m \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) A p_1, p_2, \dots, p_n prímszámok kisebbek, mint 2^{100} . Igazold, hogy:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szereshető.