CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ”GHEORGHE LAZĂR”
Ediţia a XIV-a, 22-24 martie 2013
Clasa a IX-a

1. Fie $x_i \in [1,2]$, $i=\overline{1,n}$, $n \in N^*$. Să se arate că:
a) $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 + n^2 - n + 1 \leq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$ pentru orice $n \in N^*$
b) dacă $x_1 + x_2 + ... + x_{2013} = 2684$, atunci $x_1^k + x_2^k + ... + x_{2013}^k \leq (2^k + 2) \cdot 671$ pentru orice $k \in N^*$

Emil C. Popa, Dumitru Barac,Sibiu

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic şi D piciorul înălţimii din vârful unghiului drept A. Notăm cu I_1 şi I_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ADB, respectiv ADC. Să se arate că raza cercului circumscris triunghiului AI_1I_2 este egală cu raza cercului înscris în triunghiul ABC.

GM 12/2012, 26691 (*Gheorghe Stoica*, Petroşani)

3. Determinaţi funcţiile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ având proprietatea că:
$$f\left(\frac{f(y)}{x^3}\right) = y^9 f\Big(f(x)\Big), \quad (\forall)x, y > 0.$$

Dumitru Acu, Sibiu

4. Un hexagon este înscris într-un cerc de rază R. Hexagonul are două laturi egale cu l_1, două laturi egale cu l_2 şi două laturi egale cu l_3. Să se arate că:
a) $4R^3 - (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)R - l_1 l_2 l_3 = 0$;
b) $l_1 + l_2 + l_3 \leq 3R$.

Dumitru Barac, Sibiu