

CONCURSUL INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ
"CAIUS IACOB" - Ediția a V-a

CLASA a XII-a - TEHNICĂ MATEMATICĂ

I. Să se arate că $x * y = \ln(e^x + e^y - 1)$ este o lege de compoziție pe \mathbb{R}_+ . Să se verifice că $(\mathbb{R}_+, *)$ este monoid comutativ.

II. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2xe^{x^2}$.

(i) Să se determine primitivele funcției f ;

(ii) Să se calculeze:

$$\int_1^{2013} \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} dx.$$

III. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel pe care definim o nouă lege de compoziție prin

$$x \star y = x \cdot y + y \cdot x, \quad \forall x, y \in A.$$

Să se studieze:

(i) comutativitatea legii \star ;

(ii) asociativitatea legii \star ;

(iii) distributivitatea legii \star față de adunare.

IV. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică, de perioadă $T > 0$, și $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$G(t) = \int_t^{t+T} f(x) dx.$$

Să se arate că:

(i) G este constantă;

(ii)

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.