UNIVERSITATEA ”AUREL VLAICU” DIN ARAD
FACULTATEA DE ŞTIINŢE EXACTE

CONCURSUL INTERNAŢIONAL DE MATEMATICĂ ”CAIUS IACOB” - Ediţia a V-a

CLASA a XII-a - RAŢIONAMENT MATEMATIC

I. (*i*) Fie polinomul $P(x) = x^5 \in \mathbb{R}[X]$. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, polinomul $P(x+a) - P(x)$ nu are rădăcini reale;

(*ii*) Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n \geq 2$, cu rădăcini reale distincte. Să se arate că există $a \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât polinomul $P(x+a) - P(x)$ să aibă toate rădăcinile reale.

Radu Gologan, Bucureşti

II. Fie funcţiile $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, unde g este primitiva lui f şi are loc relaţia

$$(e^{2x} + 1)f(x) = (e^x + 1)g(x),\ \forall x \in (0, \infty).$$

Să se determine funcţia f.

Ioan Ucu Crişan, Arad

III. Să se calculeze:

$$(i) \int \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx; \qquad (ii) \lim_{n\to\infty} \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{x^n}{1+nx}\, dx.$$

IV. Se dau polinoamele $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât polinomul

$$Q(x) = P_1(x^4) + xP_2(x^4) + x^2P_3(x^4)$$

se divide cu $x^3 + x^2 + x + 1$. Să se arate că polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ se divid cu $x - 1$.

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.