UNIVERSITATEA "AUREL VLAICU" DIN ARAD
FACULTATEA DE ŞTIINŢE EXACTE

CONCURSUL INTERNAŢIONAL DE MATEMATICĂ "CAIUS IACOB" - Ediţia a V-a

CLASA a XI-a - RAŢIONAMENT MATEMATIC

I. (i) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x-1, \ x \in \mathbb{Q} \\ x^2, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

II. Fie $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(i) Dacă $x_0 I_2 + x_1 A + x_2 A^2 = O_2$, să se arate că $x_1 = -\alpha x_2$ şi $x_0 = -\beta x_2$;

(ii) Să se determine α şi β astfel încât $(A - I_2)^2 = O_2$;

(iii) Să se determine α şi β astfel încât $A^2 = I_2$.

III. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{k \cdot k!}{1 + (k+1)(k!)^2}.$$

Ioan Ucu Crişan, Arad

IV. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de forma $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$.

(i) Să se afle A^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) Să se determine valorile lui a pentru care toate matricile B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt inversabile.

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.