Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a IX-a

Problema 1. a) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0.$$

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{cases} .$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D, E \in (BC)$, $F, G \in (CA)$, $H, I \in (AB)$ astfel încât $BD = CE$, $CF = AG$ şi $AH = BI$. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor $[GH]$, $[DI]$, respectiv $[EF]$ şi cu M' intersecţia dreptelor AM şi BC.

a) Arătaţi că

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{AG}{AH} \cdot \frac{AB}{AC} .$$

b) Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi a_1, a_2, $\ldots$, a_n numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leq k$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Arătaţi că

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

Problema 4. Pe o hârtie este scrisă la început o listă de numere naturale distincte. O *continuare a listei* înseamnă alegerea a două numere dintre cele existente şi scrierea pe listă a celui mai mic multiplu comun al acestora, cu condiţia ca el să nu fie deja scris. Spunem că lista *s-a închis* dacă nu mai există nicio continuare posibilă a sa (de exemplu, lista 2, 3, 4, 6 se închide după ce-l adăugăm pe 12). Care este numărul maxim de numere care pot apărea pe o listă care s-a închis, dacă la început lista conţinea 10 numere?

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.