



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2013

### CLASA a VII-a

**Problema 1.** Arătați că ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012 - x} + \sqrt{1006}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2012 - x}}$$

are 2013 soluții în mulțimea numerelor întregi.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Determinați perechile de numere reale  $(a, b)$  pentru care egalitatea

$$|ax + by| + |bx + ay| = 2|x| + 2|y|$$

este adevărată pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**Problema 3.** Pe laturile  $(AB)$  și  $(AC)$  ale triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M$  și respectiv  $N$  astfel încât  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANM$ . Punctul  $D$  este simetricul punctului  $A$  față de  $B$ , iar  $P$  și  $Q$  sunt mijloacele segmentelor  $[MN]$  și respectiv  $[CD]$ .

Demonstrați că punctele  $A, P$  și  $Q$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $AC = AB\sqrt{2}$ .

**Problema 4.** Se consideră pătratul  $ABCD$  și punctul  $E$  în interiorul unghiului  $\sphericalangle CAB$ , astfel încât măsura unghiului  $\sphericalangle BAE$  este de  $15^\circ$ , iar dreptele  $BE$  și  $BD$  sunt perpendiculare. Demonstrați că  $AE = BD$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*