TESTUL 3

Problema 1. Fie a şi b două numere naturale distincte libere de pătrate. Arătaţi că există $c > 0$ astfel încât

$$|\{n\sqrt{a}\} - \{n\sqrt{b}\}| > \frac{c}{n^3},$$

pentru orice număr natural nenul n.

Problema 2. Fie γ un cerc şi P un punct în planul său, exterior lui γ. Două drepte variabile, ℓ şi ℓ', care trec prin punctul P, intersectează cercul γ în punctele X şi Y, respectiv X' şi Y', astfel încât X este între P şi Y si X' intre P şi Y'. Să se arate că dreapta determinată de centrele cercurilor PXY' şi $PX'Y$ trece printr-un punct fix.

Problema 3. Să se determine cel mai mare număr întreg r, care are următoarea proprietate: printre oricare cinci submulţimi de cardinal 500 ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, există două care au în comun cel puţin r elemente.

Problema 4. Fie f şi g două polinoame cu coeficienţi întregi, astfel încât $\deg f > \deg g$ şi $\deg f \geq 2$. Să se arate că, dacă există o infinitate de numere prime p, astfel încât polinomul $pf + g$ are o rădăcină raţională, atunci polinomul f are o rădăcină raţională.