



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Bistrița, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a

Problema 1. Trei piraiți, Jack, Tom și Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulți săculeți care conțin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeț și împarte conținutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculețul se golește. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeț, începând tot cu sine și respectând aceeași ordine. Procedează la fel cu ceilalți săculeți, împărțind monedele după aceeași regulă. La sfârșit, Bill constată că are cu trei monede mai puțin decât Jack. Aflați câte monede a primit fiecare pirat.

Problema 2. Fiecare element al mulțimii $\{2, 3, 4, \dots, 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeași culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Problema 3. Doi prieteni, Cristi și Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 999\}$, pe care îl înmulțește cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulțește noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat și așa mai departe. Pierde cel care obține primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinați câte posibilități de a alege numărul inițial are Cristi astfel încât să câștige el jocul.

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeași sumă a cifrelor.

Demonstrați că mulțimea $M = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ conține o infinitate de numere *olimpice* și o infinitate de numere care nu sunt *olimpice*.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*