Primul baraj de selecţie pentru OBMJ
Constanţa, 5 aprilie 2012
Soluţii

Problema 1. Fie numerele reale pozitive p şi q cu proprietatea că $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{p\,(p+1)}+\dfrac{1}{q\,(q+1)}<\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{1}{p\,(p-1)}+\dfrac{1}{q\,(q-1)} \geq 1$.

Soluţie. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $pq=p+q \stackrel{not}{=} s$. Deoarece $(p+q)^2 \geq 4pq$, rezultă $s \geq 4$.

a) Avem $\dfrac{1}{p\,(p+1)}+\dfrac{1}{q\,(q+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{q+1}=1-\dfrac{p+q+2}{(p+1)\,(q+1)}=1-\dfrac{s+2}{2s+1}=\dfrac{s-1}{2s+1}<\dfrac{1}{2}$.

Inegalitatea din stânga se scrie $\dfrac{s-1}{2s+1} \geq \dfrac{1}{3}$, care se reduce la $s \geq 4$.

b) $\dfrac{1}{p\,(p-1)}+\dfrac{1}{q\,(q-1)}=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q-1}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{p+q-2}{(p-1)\,(q-1)}-1=s-3 \geq 1$.

Problema 2. Fie x şi y două numere raţionale şi n un număr natural impar. Ştiind că $x^n-2x=y^n-2y$, arătaţi că $x=y$.

Soluţie. Cazul $n=1$ este trivial.
Presupunem în continuare că $n \geq 3$ şi $x \neq y$. Din relaţia dată se obţine că

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}=2. \qquad (*)$$

Fie $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{c}$, unde $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, cu $(a,b,c)=1$. Din $(*)$ rezultă că

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}=2c^{n-1}. \qquad (**)$$

Membrul stâng al egalităţii $(**)$ este o sumă cu un număr impar de termeni, egală cu un număr par, de unde rezultă că a şi b sunt numere pare. De aici obţinem că 2^{n-1} divide $2c^{n-1}$, de unde, cum $n \geq 3$, rezultă că $2 \mid c$. Ca urmare, 2 este divizor comun al numerelor a, b, c, contradicţie.

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră punctele $D \in (BC)$ şi $M \in (AD)$. Notăm intersecţia dreptelor BM şi AC cu E, intersecţia dreptelor CM şi AB cu F şi intersecţia dreptelor EF şi AD cu N. Demonstraţi că $\dfrac{AN}{DN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AM}{DM}$.

Soluţie. Fie $\dfrac{MA}{MD}=k$ şi $\dfrac{DB}{DC}=p$, unde $k,p>0$.
Aplicând teorema lui Menelaos în triunghiul ABM cu transversala $F-N-E$ rezultă

$$\frac{NA}{NM}=\frac{EB}{EM}\cdot\frac{FA}{FB} \qquad (1)$$

Aplicând teorema lui Menelaos în triunghiul ABD cu transversala $C-M-F$ rezultă $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{k}{p+1}$.

Folosind teorema lui van Aubel, deducem că $\dfrac{MB}{ME}=\dfrac{DB}{DC}+\dfrac{FB}{FA}=\dfrac{pk+p+1}{k}$, de unde obţinem că

$$\frac{EB}{EM}=\frac{(p+1)(k+1)}{k}.$$

Înlocuind în relaţia (1) se obţine că $\dfrac{NA}{NM} = k+1$, de unde $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{k+1}{k+2}$, $\dfrac{NA}{AD} = \dfrac{k}{k+2}$ şi $\dfrac{NA}{ND} = \dfrac{k}{2}$.

Problema 4. 100 de greutăţi cu mase diferite, exprimate prin numere naturale de la 1 la 100, se aşază pe talerele unei balanţe, astfel încât balanţa se află în echilibru. Arătaţi că se pot îndepărta câte două greutăţi de pe fiecare taler astfel încât balanţa să rămână în echilibru.

Soluţie. Notăm cu A, respectiv B mulţimea numerelor naturale ce reprezintă masele greutăţilor aşezate pe cele două talere. Presupunem că $1 \in A$.

Dacă există $a, b \in \{1, 2, ..., 100\}$ astfel încât $a \in A$, $a+1 \in B$, $b \in B$, $b+1 \in A$, şi $b - a \geq 2$, problema este rezolvată.

A	?	?	a		?	?	?		$b+1$	?	?
B	?	?		$a+1$	?	?	?	b		?	?

În caz contrar, distribuţia elementelor din A şi din B respectă una din următoarele configuraţii:

A	1	2	...	...	k		$k+2$	...	...	100
B						$k+1$				

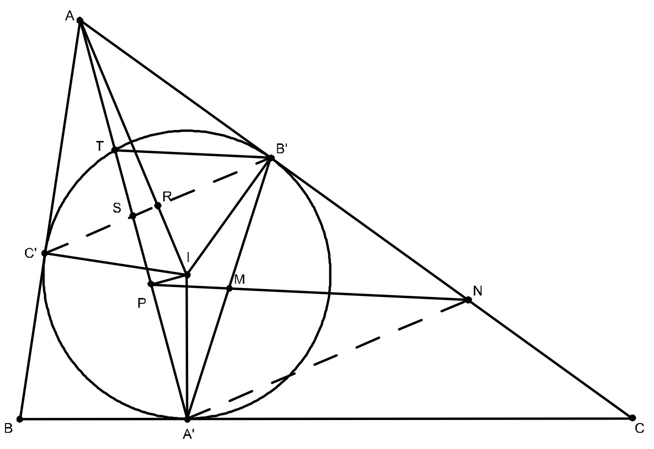
A	1	2	...	...	k					
B						$k+1$	$k+2$	...	...	100

A	1	2	...	...	k		$k+2$				
B						$k+1$		$k+3$	...	...	100

Pentru fiecare caz, rămâne să verificăm dacă există $k \in \{1, 2, ..., 100\}$ astfel încât suma elementelor lui A să fie egală cu suma elementelor lui B (condiţia de echilibru).

Pentru primul caz, este evident că acest lucru nu se întâmplă. În al doilea şi respectiv al treilea caz se obţin ecuaţiile $k(k+1) = 5050$, respectiv $(k+1)(k+2) = 5048$, care nu au soluţii numere naturale.

Problema 5. Fie ABC un triunghi şi A', B' C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Notăm cu I centrul cercului înscris şi fie P proiecţia lui I pe dreapta AA'. Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$ şi N intersecţia dreptelor MP şi AC. Arătaţi că $A'N$ este paralelă cu $B'C'$.



Soluţie. Fie $\{R\} = AI \cap BC$ şi T a doua intersecţie a cercului înscris cu dreapta AA'.

Observăm că MP este linia mijlocie în triunghiul $A'TB'$, deci $PN \parallel TB'$.

Este suficient să demonstrăm că $\Delta STB' \sim \Delta A'PN$, adică $\dfrac{TB'}{PN} = \dfrac{TS}{PA'}$. Cum $\dfrac{TB'}{PN} = \dfrac{AT}{AP}$, cerinţa se scrie $\dfrac{TS}{PA'} = \dfrac{AT}{AP}$, ceea ce este echivalent cu $\dfrac{AS}{AA'} = \dfrac{AT}{AP}$.

Din $\Delta ASR \sim \Delta API$ rezultă că $AS \cdot AP = AR \cdot AI$, iar din $\Delta ATB' \sim \Delta AA'B'$ avem $AA' \cdot AT = B'A^2$. Cum $B'A^2 = AR \cdot AI$ (din teorema catetei), rezultă cerinţa.