Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a V-a

1. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) şi negre (B) cu care formăm şiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face şiruri de două pietricele: AA, AB, BA, BB.)

i) Scrieţi toate şirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?

ii) Câte şiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este interzis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei şiruri de câte două pietricele AA, AB şi BA, deoarece BB este interzis.)

iii) Scrieţi toate şirurile de trei pietricele pe care le putem face? Câte şiruri de patru pietricele putem face?

2. Trei echipe ***A, B*** și ***C*** joacă două meciuri fiecare. La victorie se acordă 3 puncte, la egal 1 punct, la înfrângere 0 puncte. Completați tabelul de mai jos, specificând apoi rezultatul din fiecare meci.

Echipa	Nr. jocuri	Victorii	Egaluri	Înfrângeri	Goluri marcate	Goluri primite	Puncte
A	2				5	3	3
B	2				2		1
C	2				3	2	4

3. Separați exact 2 litri de apă în fiecare din următoarele două cazuri:

i) Dispuneți de două vase goale: unul de 4L și unul de 5L.

ii) Dispundeți de două vase goale: unul de 3L și unul de 4L.

4. Găsiți cel mai mare număr natural $\overline{abcd}$ care are proprietatea că $\overline{(c+1)d} = 5 \cdot \overline{a(b-1)}$.

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a VI-a

1. Separați exact 2 litri de apă în fiecare din următoarele două cazuri:
   i) Dispuneți de două vase goale: unul de 4L și unul de 5L.
   ii) Dispundeți de două vase goale: unul de 3L și unul de 4L.

2. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) şi negre (B), cu care formăm şiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face şiruri de două pietricele AA, AB, BA, BB.)

i) Scrieţi toate şirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?

ii) Câte şiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este interzis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei şiruri de câte două pietricele AA, AB şi BA, deoarece BB este interzis.)

iii) Scrieţi toate şirurile de trei pietricele pe care le putem face în aceste condiţii. Câte şiruri de patru pietricele putem face?

Fie r_N numărul de şiruri pe care le putem face cu N pietricele având condiţia ca două pietricele negre să nu fie alăturate.

iv) Arătaţi că $r_{18} = r_{17} + r_{16}$

Hint: Consideraţi separate cazurile în care ultima pietricică e albă, respectiv când ultima pietricică e neagră.

3. Franța, Italia și România au participat la o competiție sportivă.

Să se afle câte medalii de aur, câte de argint și câte de bronz a câștigat fiecare dintre aceste trei țări, știind că:

- România a câștigat o medalie în plus de aur, dar cu trei mai puține de argint, față de Italia.
- Franța este singura cu cele mai multe medalii de bronz (18), dar singura cu cele mai puține de aur (7).
- Fiecare țară are cel puțin 6 medalii de fiecare fel.
- Italia are în total 27 de medalii.
- Italia are cu 2 mai multe medalii de bronz decât de aur.
- Cele 3 țări au în total 38 medalii de bronz.
- Franța are de două ori mai multe medalii de argint decât medaliile de aur ale Italiei.

4. Fie $A = \{(x, y) / 7x + 3y = 2010, x \in N, y \in N\}$.Câte elemente are mulțimea A ?

(*Gazeta Matematică*)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a VII-a

1. Considerăm că n persoane (care se cunosc între ele) stau în jurul unei mese rotunde. Fiecare persoană afirmă: „Ambele persoane din stânga şi din drepta mea sunt mincinoase sau ambele spun adevărul." Cel puţin una dintre persoane este mincinoasă. Aflaţi ce valori poate lua n, ştiind că $50 \le n \le 60$.
2. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) şi negre (B), cu care formăm şiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face şiruri de două pietricele AA, AB, BA, BB.)
   i) Scrieţi toate şirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?
   ii) Câte şiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este intrezis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei şiruri de câte două pietricele AA, AB şi BA, deoarece BB este interzis.)

   iii) Scrieţi toate şirurile de trei pietricele pe care le putem face în aceste condiţii. Câte şiruri de patru pietricele putem face?

Fie r_N numărul de şiruri pe care le putem face cu N pietricele având condiţia ca două pietricele negre să nu fie alăturate.

   iv) Arătaţi că $r_N = r_{N-1} + r_{N-2}, (\forall) n \ge 4$

   Hint: Consideraţi separate cazurile în care ultima pietricică e albă, respectiv când ultima pietricică e neagră.

3. Cătălin se joacă împreună cu prietenii săi Andrei şi Cristina mai multe jocuri. La fiecare joc, Cătălin alege două numere naturale x şi y, 1 ≤ x ≤ y. Cătălin îi comunică lui Andrei suma x+y, iar Cristinei produsul xy, fără ca Andrei şi Cristina să ştie ce număr a fost spus celuilalt. Andrei şi Cristina încearcă să găsească cele două numere, ei fiind persoane foarte inteligente.

i) La primul joc, Cristina spune imediat "Ştiu numerele x şi y". Ce putem noi spune despre numerele acestea? Explicați!

ii) La al doilea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune: "Știu numerele". Considerând că suma era 4, cât sunt numerele x și y? Explicați!

iii) În al treilea joc, Cristina spune "Nu știu numerele". Andrei spune "Nu știu numerele". Cristina spune "Știu numerele". Știind că produsul era 4, aflați x și y. Explicați!

4. Determinaţi numerele prime $p \le q \le r$ pentu care $p^4 + q^4 + r^4 = 29811$.

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudeţean de matematică
PRO-PERFORMANŢA
Ediţia a III-a, noiembrie 2017
Clasa a VIII-a

1. Ioana împlineşte 7 ani. Colegii ei i-au adus un tort cu 7 lumânări "buclucaşe" aprinse, asşezate sub formă de cerc. Dacă Ioana suflă într-o lumanare, aceasta, precum şi cele două de lângă ea îşi schimbă starea (dacă una dintre cele trei lumânări este aprinsă atunci se va stinge iar dacă este stinsă ea se va aprinde; dacă suflă într-o lumanare stinsă aceasta se aprinde!). Ioana are voie să sufle la fiecare *pas* doar într-o lumânare. Care este numărul minim de *paşi* de care are nevoie pentru a stinge toate lumânările?

2. Pe patru monede identice ca formă sunt scrise numerele $1, 2, 3$ şi 4. Cele patru monede cântăresc un număr de grame egal cu numărul scris pe ele. Una dintre ele este falsă (cântăreşte mai mult sau mai puţin decât numărul scris pe ea). Să se arate că, folosind o balanţă, se poate determina moneda falsă precum şi dacă este mai grea sau mai uşoară decât greutatea scrisă pe ea prin două cântăriri.

3. Într-o cameră stau în jurul unei mese rotunde 25 de persoane, unele mint mereu iar altele spun mereu adevărul. Cele 25 de persoane se cunosc între ele. Un înţelept intră în cameră şi vrea să afle care sunt cei care spun adevărul, deşi nu cunoaşte pe niciunul dintre cei 25. El cere fiecăruia să arate spre prima persoană aflată la masă în stânga sa şi care spune adevărul. Înţeleptul observă că fiecare arată spre o altă persoană şi că nu există o persoană spre care au arătat alte două persoane. El mai ştie că există cel puţin o persoană care spune adevărul. Deşi a analizat cu atenţie toate răspunsurile, a constatat că nu poate şti cu certitudine nici măcar o persoană care spune adevărul sau care minte. După un moment de gândire înţeleptul afirmă că totuşi ştie numărul de persoane de la masă care spun adevărul. Care este acest număr? Justificaţi!

4. Într-un plan α se consideră n puncte $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Fie M un punct exterior planului α.

   (a) Să se determine numărul minim de plane determinate de câte trei din cele $n+1$ puncte precum şi situaţia în care se obţine acest minim.

   (b) Să se determine n astfel încât numărul maxim de plane determinate de câte trei din cele $n+1$ puncte este 16.

   (c) Pentru $n = 6$ să se decidă dacă există o situaţie în care numărul planelor determinate de câte trei din cele 7 puncte este exact 8. Justificare.

5. **SUCCES!**

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a IX-a

1. Lumea este împărțită în două specii: oameni și roboți. Oamenii spun întotdeauna adevărul despre alți oameni și mint întotdeauna în legătură cu roboții. Roboții spun întotdeauna adevărul în legătură cu roboții și mint întotdeauna în legătură cu oamenii. Acest lucru este cunoscut de ambele specii.

Atenție: Omul nu face afirmații mincinoase pentru că vorbește cu un robot, ci dacă vorbește despre un robot. Analog pentru un robot. Prin persoană vom înțelege om sau robot).

i) A spune: "B este robot". Precizați ce specie este A. Puteți spune ce este B? Explicați!

ii) C spune: "D a spus că E este om". Ce putem spune despre fiecare dintre aceste trei persoane?

iii) Considerăm că N persoane ($N \geq 2$) stau în jurul unei mese circulare. Fiecare spune despre persoana vecină din dreapta sa "Tu minți în legătură cu persoana din dreapta ta". Ce putem spune despre N? Ce putem spune despre cum sunt aranjate persoanele în jurul mesei? Explicați!

iv) N persoane sunt aranjate în jurul unei mese ($N \geq 2$). Fiecare spune vecinului din dreapta "Vecinul tău din dreapta minte în legătură cu vecinul său din dreapta". Ce putem spune despre N și despre aranjarea persoanelor în jurul mesei?

2. Cătălin se joacă împreună cu prietenii săi Andrei și Cristina mai multe jocuri. La fiecare joc, Cătălin alege două numere naturale x și y, $1 \leq x \leq y$. Cătălin îi comunică lui Andrei suma $x+y$, iar Cristinei produsul xy, fără ca Andrei și Cristina să știe ce număr a fost spus celuilalt. Andrei și Cristina încearcă să găsească cele două numere, ei fiind persoane foarte inteligente.

i) La primul joc, Cristina spune imediat "Știu numerele x și y". Ce putem noi spune despre numerele acestea? Explicați!

ii) La al doilea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune: "Știu numerele". Considerând că suma era 4, cât sunt numerele x și y? Explicați!

iii) În al treilea joc, Cristina spune "Nu știu numerele". Andrei spune "Nu știu numerele". Cristina spune "Știu numerele". Știind că produsul era 4, aflați x și y. Explicați!

iv) În al patrulea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune "Știam că nu știi numerele". Cristina spune "Acum le știu". Știind că produsul este 8, cât sunt numerele x și y? Explicați!

3. Alice şi Bob au la dispoziţie o tablă de şah specială de forma unui tablou cu **n linii şi m coloane** (n și m numere naturale nenule) şi **un pion**. Cei doi joacă următorul joc:
   - Iniţial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu;
   - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuţele tablei de şah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a aşeza pionul în orice poziţie);
   - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuţele adiacente poziţiei curente, cu condiţia ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuţa respectivă până atunci (doua căsuţe se numesc adiacente dacă au o latură comună);
   - Pierde jucătorul care nu mai poate muta.

Are Alice întotdeauna strategie de câştig? Justificaţi!

Observaţie: Prima şi a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiţi

4. Considerăm sistemul $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

a) Ştiind că $x, y, z \in \mathbb{R}$, să se arate că $x + y + z = 1$

b) Să se rezolve sistemul în mulţimea $[0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty)$

c) Să se determine o soluţie în mulţimea $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(Gazeta Matematică)

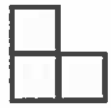
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a X-a

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune $2^n x 2^n$, n număr natural nenul. Dându-se o căsuță oarecare aflată pe linia x ($1 \le x \le 2^n$) și coloana y ($1 \le y \le 2^n$), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alaturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular: n = 3.
Observație: orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de 90°.



2. Lumea este împărțită în două specii: oameni și roboți. Oamenii spun întotdeauna adevărul despre alți oameni și mint întotdeauna în legătură cu roboții. Roboții spun întotdeauna adevărul în legatură cu roboțiiși mint întotdeauna în legătură cu oamenii. Acest lucru este cunoscut de ambele specii.

Atenție: Omul nu face afirmații mincinoase pentru că vorbește cu un robot, ci dacă vorbește despre un robot. Analog pentru un robot. Prin persoană vom înțelege om sau robot).

i) A spune: "B este robot". Precizați ce specie este A. Puteți spune ce este B? Explicați!

ii) C spune: "D a spus că E este om". Ce putem spune despre fiecare dintre aceste trei persoane?

iii) Considerăm că N persoane (N ≥ 2) stau în jurul unei mese circulare. Fiecare spune despre persoana vecină din dreapta sa "Tu minți în legătură cu persoana din dreapta ta". Ce putem spune despre N? Ce putem spune despre cum sunt aranjate persoanele în jurul mesei? Explicați!

iv) N persoane sunt aranjate în jurul unei mese (N ≥ 2). Fiecare spune vecinului din dreapta "Vecinul tău din dreapta minte în legătură cu vecinul său din dreapta". Ce putem spune despre N și despre aranjarea persoanelor în jurul mesei?

3. Avem șase bile, colorate astfel: două bile roșii, două bile verzi și două bile galbene.
Din fiecare culoare, o bilă este grea și una este ușoară, adică au greutăți diferite. Bilele grele au aceeași greutate, bilele ușoare au aceeași greutate.
Folosind o balanță, identificați cele trei bile grele din două cântăriri.

4. Există numere prime distincte p, q, r astfel încât $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ sunt termeni ai unei progresii aritmetice?

(Gazeta matematică)

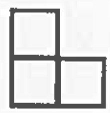
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a XI-a

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune 2^nx2^n, n număr natural nenul. Dându-se o căsuță oarecare aflată la linia x ($1 \le x \le 2^n$) și coloana y ($1 \le y \le 2^n$), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alaturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular: n = 3.
Observație: orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de 90°.



2. Alice și Bob au la dispoziție o tablă de șah specială de forma unei matrici cu **n linii și m coloane** (n și m numere naturale nenule) **și un pion**. Cei doi joacă următorul joc:
   - Inițial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu
   - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuțele tablei de șah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a așeza pionul în orice poziție)
   - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuțele adiacente poziției curente, cu condiția ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuța respectivă până atunci (doua căsuțe se numesc adiacente dacă au o latură comună)
   - Pierde jucătorul care nu mai poate muta

   Are Alice întotdeauna strategie de câștig? Justificați!

   Observație: Prima și a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiți.

3. O țară are exact N > 1 orașe și șosele care conectează unele orașe (o șosea conectează două orașe distincte). Știm că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată.

   a) Demonstrați că există un oraș cu o singură șosea adiacentă. Arătați în plus că există cel puțin două astfel de orașe.
   b) Câte șosele se află în oraș?

c) O șosea a fost închisă pentru reparații. Se mai poate ajunge din orice oraș în oricare altul?

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2^{\frac{x_n}{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Calculați:

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} x_n^n,\ \lim_{n\to\infty} n(x_n - 1).$$

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

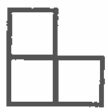
SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Clasa a XII-a

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune $2^n x 2^n$, n număr natural. Dându-se o căsuță oarecare aflată la linia x ($1 \le x \le 2^n$) și coloana y ($1 \le y \le 2^n$), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alaturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular: n = 3.

   Observație: orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de 90°.



2. Alice și Bob au la dispoziție o tablă de șah specială de forma unei matrici cu **n linii și m coloane** (n și m numere naturale nenule) și **un pion**. Cei doi joacă următorul joc:
   - Inițial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu
   - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuțele tablei de șah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a așeza pionul în orice poziție)
   - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuțele adiacente poziției curente, cu condiția ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuța respectivă până atunci (doua căsuțe se numesc adiacente dacă au o latură comună)
   - Pierde jucătorul care nu mai poate muta

   Are Alice întotdeauna strategie de câștig? Justificați!

   Observație: Prima și a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiți.

3. O țară are exact N > 1 orașe și șosele care conectează unele orașe (o șosea conectează două orașe distincte). Știm că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată.

a) Demonstrați că există un oraș cu o singură șosea adiacentă. Arătați în plus că există cel puțin două astfel de orașe.
b) Câte șosele se află în oraș?
c) O șosea a fost închisă pentru reparații. Se mai poate ajunge din orice oraș în oricare altul?

4. Să se determine funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f'(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ și $f(x) = f(\sin x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!

Concursul interjudeţean de matematică
Cupa PRO-PERFORMANŢA
2017-2018
Ediţia a III-a

Juniori II (Clasele V-VI)

1. Avem un vas care conţine 24 de litri de apă. Avem de asemenea trei vase goale: unul de 5 litri, unul de 11 litri şi unul de 13 litri. Cum putem împărţi cei 24 litri de lichid în trei părţi egale, astfel încât să avem trei vase care conţin 8 litri fiecare?

2.

i) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?

Fie n <10, n număr natural nenul.

ii) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor n?
iii) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor n?
iv) Câte numere naturale mai mari decât 500 şi mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?

3. Şase persoane, ***A, B, C, D, E*** si ***F*** decid să concureze într-un turneu de tenis. Fiecare concurent va juca cu fiecare dintre ceilalţi. Orice meci se încheie cu victoria unui concurent şi înfrângerea celuilalt. Ştim următoarele:

- Niciun concurent nu şi-a pierdut toate meciurile, dar unul singur le-a câştigat pe toate.
- ***D*** a câştigat meciul cu ***B***.
- ***A*** şi ***E*** au câştigat acelasi număr de meciuri, acel număr fiind impar, dar ***A*** a pierdut în meciul cu ***E***.
- ***B*** şi ***F*** au câştigat în total 7 meciuri.
- ***C*** a câştigat un singur joc, împotriva unicei persoane dintre celelalte 5 care a câştigat de asemenea un singur meci.

Puteţi deduce toate rezultatele?

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare răspuns trebuie explicat.Timp de lucru două ore.

- **SUCCES!**

Concursul interjudețean de matematică
Cupa PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Juniori I (Clasele VII-VIII)

1.

i) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?

Fie n <10, n număr natural nenul.

ii) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor n?
iii) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor n?
iv) Câte numere naturale mai mari decât 500 și mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?
v) Câte numere mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8 și cel puțin o cifră egală cu 5?
vi) Care este suma tuturor sumelor cifrelor numerelor de la 0 la 999 inclusiv?

2. Șase persoane, ***A, B, C, D, E*** si ***F*** decid să concureze într-un turneu de tenis. Fiecare concurent va juca cu fiecare dintre ceilalți. Orice meci se încheie cu victoria unui concurent și înfrângerea celuilalt. Știm următoarele:

- Niciun concurent nu și-a pierdut toate meciurile, dar unul singur le-a câștigat pe toate.
- ***D*** a câștigat meciul cu ***B***.
- ***A*** și ***E*** au câștigat acelasi număr de meciuri, acel număr fiind impar, dar ***A*** a pierdut în meciul cu ***E***.
- ***B*** și ***F*** au câștigat în total 7 meciuri.
- ***C*** a câștigat un singur joc, împotriva unicei persoane dintre celelalte 5 care a câștigat de asemenea un singur meci.

Puteți deduce toate rezultatele?

3. Ana și Crina dispută un joc. Ele aleg pe rând un număr din mulțimea {0, 1, 2}, Ana fiind prima la mutare. La fiecare mutare (cu excepția Anei când face prima mutare), jucătorul nu alege același număr care tocmai a fost ales de celălalt.

În prima versiune a jocului, Crina câștigă, după ce a mutat, dacă suma numerelor jucate până atunci este multiplu de 3. De exemplu, Crina câștigă după mutările: (2, 0), (1, 2), (1, 0) deoarece suma numerelor este 6. Ana câștigă dacă Crina nu învinge în 5 runde. Spre exemplu Ana câștigă după (2, 0), (1, 2), (1, 2), (0, 2), (1, 2).

i) Arătați că dacă prima mutare a Anei este 1 sau 2, Crina câștigă imediat.

Concursul interjudeţean de matematică
Cupa PRO-PERFORMANŢA
2017-2018
Ediţia a III-a

Seniori (Clasele IX-XII)

1. Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?

Fie n <10, n număr natural nenul.

a) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor n?
b) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor n?
c) Câte numere naturale mai mari decât 500 şi mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?
d) Câte numere mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8 şi cel puţin o cifră egală cu 5?
e) Care este suma tuturor sumelor cifrelor numerelor de la 0 la 999 inclusiv?

2. Se dă un segment de lungime 1. Se aleg aleator două puncte din interiorul acestui segment. Prin tăieturi aplicate în aceste puncte obţinem 3 noi segmente. Care este probabilitatea ca acele 3 segmente să poată forma un triunghi?

3. Sunteţi un comandat al unei divizii antitanc din al Doilea Război Mondial. Armata inamica deţine un numar oarecare de tancuri (necunoscut). Câmpul de bătalie poate fi reprezentat ca un şir de n pătrate de latura 1 unitate (n > 1) dispuse pe o dreaptă orizontală. Numim vecin al unui astfel de pătrat, un alt pătrat din şir cu proprietatea că cele două au o latură comună (toate pătratele au exact 2 vecini cu excepţia primului si ultimului, care au câte unul). Ştiţi că orice pătrat poate conţine oricâte tancuri (posibil 0), iar scopul dumneavoastră este distrugerea tuturor tancurilor, ţinând cont de următoarele observaţii:

- Puteţi ordona tragerea în unul din cele n pătrate, astfel lovind **o dată** fiecare din tancurile care se află în acel pătrat
- Dacă un tanc este lovit pentru **prima** oară, se va muta în unul din pătratele vecine pătratului în care s-a aflat până acum
- Dacă un tanc este lovit **a doua** oară, va fi distrus

Observaţie: Tancurile dintr-un pătrat, lovite pentru prima oară, se vor muta independent în unul dintre vecinii pătratului. Cu alte cuvinte, nu este obligatoriu ca toate să se mute în acelaşi vecin.

Determinaţi o strategie cu număr minim de ordine de tragere, astfel încât la final să fie garantat că nu mai există niciun tanc, indiferent de numărul şi aşezarea acestora la început.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru două ore.

SUCCES!