1. Fie triunghiul ABC. Bisectoarea interioară a unghiului A intesectează latura BC în punctul D. Fie M mijlocul laturii BC. Cercul circumscris triunghiului ADM intersectează laturile AB şi AC în punctele Q şi respectiv P (altele decât A). Dacă N este mijlocul segmentului PQ, să se arate că $MN \| AD$.

2. Fie ABC un triunghi şi ω cercul său înscris. Fie D_1 şi E_1 punctele de tangenţă ale lui ω cu BC şi AC. Fie D_2 şi E_2 punctele pe laturile BC şi AC astfel încât $CD_2 = BD_1$ şi $CE_2 = AE_1$. Fie P punctul de intersecţie al dreptelor AD_2 şi BE_2. Cercul ω intersectează segmentul AD_2 în două puncte. Fie Q cel mai apropiat de de vârful A. Să se arate că $AQ = D_2P$.

3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB \neq AC$. Notăm cu H ortocentrul său şi cu M mijlocul segmentului BC. Fie D şi E puncte pe laturile AB şi respectiv AC astfel încât $AE = AD$ iar punctele D, H şi E sunt coliniare. Să se arate că HM este perpendiculară pe coarda comună cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi ADE.

4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic scalen iar M, N şi P mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB. Mediatoarele laturilor AB şi AC intersectează pe AM în punctele D şi E. Dreptele BD şi CE se intersectează în punctul F (în interiorul triunghiului). Să se arate că punctele A, N, F şi B sunt conciclice.

5. Fie ω cercul circumscris al unui triunghi ascuţitunghic ABC. Tangentele în B şi C la cercul ω se intersectează în punctul P, iar dreptele AP şi BC se intersectează în punctul D. Pe laturile AC şi AB se consideră punctele E şi F astfel încât $DE \| BA$ şi $DF \| CA$.

   (a) Să se arate că punctele F, B, C şi E sunt conciclice.

   (b) Notăm cu A_1 centrul cercului circumscris patrulaterului $FBCE$. Analog se definesc şi punctele B_1 şi C_1. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

6. Într-un triunghi ascuţitunghic $A_1A_2A_3$, fie A_1B_1 şi A_2B_2 înălţimile din A_1 şi A_2 iar A_1C_1 şi A_2C_2 bisectoarele unghiurilor interioare. Notăm cu I şi O centrele cercurilor înscris şi respectiv circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$. Să se arate că punctele B_1, B_2 şi I sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele C_1, C_2 şi O sunt coliniare.

7. Fie P un punct în interiorul triunghiului $P_1P_2P_3$. Fie Q_1, Q_2 şi Q_3 punctele de intresecţie ale dreptelor PP_1, PP_2 şi respectiv PP_3 cu laturile triunghiului $P_1P_2P_3$. Să se arate că printre rapoartele $\frac{PP_1}{PQ_1}$, $\frac{PP_2}{PQ_2}$ şi $\frac{PP_3}{PQ_3}$ există cel puţin unul mai mic sau egal decât 2 şi cel puţin unul mai mare sau egal decât 2.

8. Fie ABC un triunghi şi J centrul cercului exînscris opus vârfului A. Acest cerc este tangent laturilor BC, AB şi AC în punctele M, K şi respectiv L. Dreptele LM şi BJ se intersectează în F iar dreptele KM şi CJ se intersectează în G. Fie S punctul de intersecţie al dreptelor AF şi BC, şi fie T punctul de intersecţie al dreptelor AG şi BC. Să se arate că M este mijlocul segmentului ST.

9. Fie ABC un triunghi şi P un punct exterior, în planul triunghiului. Dreptele AP, BP şi CP intersectează dreptele BC, CA şi respectiv AB în punctele D, E şi respectiv F. Presupunem că ariile triunghiurilor PBD, PCE şi PAF sunt egale. Să se arate că oricare din aceste arii este egală cu aria triunghiului ABC.

10. Triunghiul ABC este înscris în cercul ω. Pe dreapta BC se ia punctul P astfel încât PA este tangentă la cercul ω. Bisectoarea unghiului $\angle APB$ intersectează segmentele AB şi AC în punctele D şi respectiv E. Segmentele BE şi CD se intersectează în punctul Q. Dacă dreapta PQ trece prin centrul cercului ω, să se calculeze măsura unghiului $\angle BAC$.

Probleme culese de Cătălin Gherghe