

Mathematical Danube Competition

Juniors

October 26 th 2019

Subiectul 1

Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația

$$x^2(x^2 + 1) = 21^y - 1.$$

Subiectul 2

Să se arate că pentru orice numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}^*$, există un număr real x astfel încât numerele $x + a_1, x + a_2, \dots, x + a_n$ să fie iraționale.

Subiectul 3

Scriem pe o linie 51 de numere naturale nenule cu suma lor egală cu 100. Arătați că pentru orice număr natural $k, 1 \leq k \leq 99$, există câteva numere scrise consecutiv pe linie având suma egală cu k sau $100-k$.

Subiectul 4

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, iar M și N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD . Să se demonstreze că dacă măsurile unghiurilor \widehat{AMB} și \widehat{AMD} sunt egale, atunci măsurile unghiurilor \widehat{ANB} și \widehat{BNC} sunt egale.

Mathematical Danube Competition

October 26 th 2019

Subiectul 1

Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația $x^2(x^2 + 1) = 21^y - 1$.

Lucian Petrescu

Soluție: (Lucian Petrescu) Putem observa că $y \in \mathbb{N}$, iar dacă (x_0, y_0) , atunci și $(-x_0, y_0)$ este soluție a ecuației. În plus $(0, 0)$ este soluție. Rescriem ecuația $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 21^y$. Se observă că $x^2 - x + 1$ și $x^2 + x + 1$ sunt coprime. Va rezulta că $x^2 - x + 1 = 1$ și

$x^2 + x + 1 = 21^y$ cu soluția $(0, 0)$ sau $x^2 - x + 1 = 3^y$ și $x^2 + x + 1 = 7^y$. Din prima relație avem $(2x - 1)^2 = 3(4 \cdot 3^{y-1} - 1)$, adică $3 \mid (2x - 1)^2$, mai mult $9 \mid (2x - 1)^2$, deci $9 \mid (4 \cdot 3^{y-1} - 1)$ care dă soluția $y = 1$, apoi $x = 2$. Așadar mulțimea soluțiilor este $(-2, 1), (0, 0), (2, 1)$. ■

Subiectul 2

Să se arate că pentru orice numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}^*$, există un număr real x astfel încât numerele $x + a_1, x + a_2, \dots, x + a_n$ să fie iraționale.

(***)

Soluție: (Cristian Mangra) Presupunem că există un număr irațional y astfel încât cel puțin unul din numerele $ky + a_1, ky + a_2, \dots, ky + a_n$ este rațional, oricare $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$. Aplicând principiul cutiei, există cel puțin un număr

natural $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ și numerele distincte $i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ astfel încât $iy + a_p, jy + a_p$ sunt raționale, deci și $(i - j)y$ este rațional, deci y este rațional. Contradicție ■

Subiectul 3

Scriem pe o linie 51 de numere naturale nenule cu suma lor egală cu 100. Arătați că pentru orice număr natural $k, 1 \leq k \leq 99$, există câteva numere scrise consecutiv pe linie având suma egală cu k sau $100 - k$.

(***)

Soluție: (Cristian Mangra) Fie a_1, a_2, \dots, a_{51} cele 51 de numere cu $a_1 + a_2 + \dots + a_{51} = 100$. Pe un cerc cu lungimea egală cu 100 eșezăm 100 de puncte astfel încât lungimea oricărui arc

determinat de două puncte vecine (dintre acestea) să fie egală cu 1. Fixăm un punct, dintre acestea, pe care îl notăm cu A_1 , apoi marcăm pe cerc punctele A_2, A_3, \dots, A_{51} astfel încât măsura arcului

mic $A_i A_{i+1}$ să fie egală cu a_i , pentru oricare $i = \overline{1, 50}$. Evident că lungimea arcului $A_{51} A_1$ este a_{51} . Vom colora aceste 51 de puncte cu albastru, iar celelalte 49 cu roșu. Vom arăta că pentru orice număr natural k de la 1 la 99 există $i, j \in \{1, 2, \dots, 99\}$ astfel încât lungimea arcului mic $A_i A_j$ sau a arcului mare $A_i A_j$ este k sau $100 - k$. Pentru $k = 50$, avem 51 de puncte colorate cu albastru, prin urmare cel puțin două dintre ele sunt diametral opuse, ceea ce rezolvă problema. Pentru $k \in \{1, 2, \dots, 49\}$ vom

considera punctele A_i cu $i = \overline{1, 51}$ fiind mijloacele celor 51 de arce de lungime $2k$. Dacă vreunul din capetele acestor arce este colorat în albastru, problema este rezolvată. Vom presupune că toate aceste capete sunt colorate cu roșu. Cum fiecare dintre acestea este considerat de cel mult două ori, rezultă că cel puțin 51 dintre cele 100 sunt colorate cu roșu, contradicție. Cazul în care $k \in \{51, 52, \dots, 99\}$ este similar cu cel de mai sus. ■

Subiectul 4

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, iar M și N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD . Să se demonstreze că dacă măsurile unghiurilor AMB și AMD sunt egale, atunci măsurile unghiurilor ANB și BNC sunt egale.

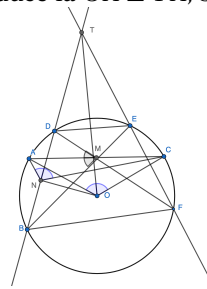
(***)

Soluție: (Cristian Mangra) **Lemă:** Fie $ABCD$ un trapez isoscel înscris în cercul \mathcal{C} , M punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD , iar T punctul de intersecție al laturilor neparalele AD și BC . Dacă paralela prin M la AB intersectează cercul \mathcal{C} în E și F , atunci TE este tangentă la cercul \mathcal{C} .

Demonstrație: Evident, T, M, O sunt coliniare. Apoi, $m(\widehat{AOT}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{2}(360^\circ - m(\widehat{AB})) = 180^\circ - m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{TCA})$, ceea ce conduce spre $TCOA$ inscriptibil. Din puterea punctului M față de cercul circumscris triunghiului AOC obținem $OM \cdot MT = MC \cdot MA$, dar $MC \cdot MA = ME \cdot MF = ME^2$. Prin urmare $ME^2 = OM \cdot MT$ și folosind reciproca teoremei înălțimii obținem $TE \perp OE$, adică TE tangentă la \mathcal{C} . ★

Notăm cu E și F punctele în care dreptele BM și DM taie a doua oară cercul circumscris patrulaterului $ABCD$. Deoarece M este mijlocul diagonalei

AC , iar măsurile unghiurilor AMB și AMD sunt egale, rezultă că $BFED$ este trapez isoscel și $AC \parallel BF \parallel DE$. Vom nota cu T intersecția dreptelor BD și EF , rezultă din leună că TA și TC sunt tangente cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ de centru O . Asta va duce la $OA \perp TA, OC \perp TC$.



Cum N este mijlocul lui BD , obținem $ON \perp BD$. Așadar punctele T, A, N, O, C sunt conciclice, prin urmare $\widehat{AND} \equiv \widehat{AOT}$ și $\widehat{TNC} \equiv \widehat{COT}$ și cum $\widehat{COT} \equiv \widehat{AOT}$ va rezulta $\widehat{ANT} \equiv \widehat{CNT}$. De aici vom obține $\widehat{ANB} \equiv \widehat{BNC}$ ■