CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călărași, 26 octombrie 2019

Clasa a VI–a

Problema 1.

a) Tudor a observat că numărul 2019 a fost obținut prin scrierea a două numere naturale consecutive de două cifre, 19 și 20, în ordine descrescătoare. Dacă M este mulțimea numerelor naturale mai mari decât 2019 și mai mici decât 10 000 care pot fi formate în acest fel, atunci calculează suma elementelor mulțimii M.

b) Se consideră $\overline{abc}$ și $\overline{cba}$ numere de trei cifre, iar $\overline{xxxy00}$ este un număr de șase cifre. Dacă $\overline{abc}\cdot\overline{cba}=\overline{xxxy00}$, atunci determină toate mulțimile $M=\left\{\overline{abc},\overline{cba},\overline{xxxy00}\right\}$.

Gabriela Ruse, Călărași

Problema 2. Arată că numărul $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2019}$ nu este un număr natural.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 3. Determină cifrele nenule a, b, c și d cu proprietățile $\overline{ab}=a+b+c+d$ și $\overline{cd}=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

Adriana Constantin, Călărași

Problema 4. Andrei și Vlad joacă următorul joc: din numărul 2019^{2019} ei scad succesiv cubul unui număr natural nenul n, $n\le 12$. Câștigă jucătorul după mutarea căruia se ajunge la un număr care este un multiplu al lui 13 și este mai mic decât 12^3. Dacă începe Andrei, demonstrați că el poate găsi o strategie care îi permite să câștige, oricare ar strategia lui Vlad.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 5. O mulțime $A\subset\mathbb{N}$ se numește *specială* dacă are cel puțin trei elemente și oricare ar fi $\{a,\ b,\ c\}\subset A$, rezultă $a+b\neq c$. Să se arate că în mulțimea $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 3^8-1\}$ este inclusă o mulțime *specială* A care conține 256 elemente.

Vasile Pop

Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: **Problema 1. a)** 2 puncte, **b)** 2 puncte; **Problema 2**. 5 puncte; **Problema 3.** 5 puncte; **Problema 4.** 7 puncte; **Problema 5. 7** puncte.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călărași, 26 octombrie 2019

Clasa a VI–a

Problema 1.

a) Tudor a observat că numărul 2019 a fost obținut prin scrierea a două numere naturale consecutive de două cifre, 19 și 20, în ordine descrescătoare. Dacă M este mulțimea numerelor naturale mai mari decât 2019 și mai mici decât 10 000 care poate fi formate în acest fel, atunci calculează suma elementelor mulțimii M.

b) Se consideră $\overline{abc}$ și $\overline{cba}$ numere de trei cifre, iar $\overline{xxxy00}$ este un număr de șase cifre. Dacă $\overline{abc}\cdot\overline{cba}=\overline{xxxy00}$, atunci determină toate mulțimile $M=\left\{\overline{abc},\overline{cba},\overline{xxxy00}\right\}$.

Soluție: a) $2120+2221+2322+\ldots+9998=\left(2100+2200+2300+\ldots+9900\right)+\left(20+21+22+\ldots+98\right)=$

$=100\left(21+22+23+\ldots+99\right)+\left(21+22+23+\ldots+99\right)+20-99=101\cdot\left(\dfrac{99\cdot100}{2}-\dfrac{20\cdot21}{2}\right)+20-99=478661$

b) $\overline{xxxy00}\vdots100,\ 100=2^2\cdot5^2\Rightarrow\overline{abc}\cdot\overline{cba}\vdots2^2\cdot5^2$. Dacă unul dintre cei doi factori ar fi divizibil cu 2 și cu 5, ultima sa cifră ar fi 0, deci prima cifră a celuilalt ar fi 0, contradicție, rezultă că $\overline{abc}\vdots5^2$, $\overline{cba}\vdots2^2$ sau $\overline{abc}\vdots2^2$, $\overline{cba}\vdots5^2$. Dacă $\overline{abc}\vdots25,\ \overline{cba}\vdots4\Rightarrow$($\overline{bc}=25$ și $\overline{ba}=24;\ 28$) sau ($\overline{bc}=75$ și $\overline{ba}=72;\ 76$).

$\overline{abc}$	425	825	275	572
$\overline{cba}$	524	528	572	275
$\overline{abc}\cdot\overline{cba}$	222700	435600	157300	157300

În concluzie $M=\{425,\ 524,\ 222700\}$ sau
$M=\{825,\ 528,\ 435600\}$ sau
$M=\{275,\ 572,\ 157300\}$.

Gabriela Ruse, Călărași

Problema 2. Arată că numărul $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2019}$ nu este un număr natural.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: $2^{10}=1024<2019<2^{11}$; $(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{1023})+\dfrac{1}{1024}+(\dfrac{1}{1025}+...+\dfrac{1}{2019})$; Cu excepția lui 1024 toți ceilalți numitori se divid cu cel mult 2^9 și pentru aducerea la un numitor comun, se poate amplifica fracția $\dfrac{1}{1024}$ cu un număr impar și celelalte fracții din sumă cu numere pare. La numărător vom avea o suma de numere pare și un număr impar, deci numărătorul este impar, iar numitorul comun este număr par. Rezultă că $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2019}$ nu este un număr natural.

Problema 3. Determină cifrele nenule a, b, c și d cu proprietățile $\overline{ab}=a+b+c+d$ și $\overline{cd}=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: $(1):\overline{ab}=a+b+c+d\Leftrightarrow9a=c+d$; $(2):\overline{cd}=a\cdot b\cdot c\cdot d\Leftrightarrow10c+d=a\cdot b\cdot c\cdot d$; din (1) rezultă $a=1(i)$ sau $a=1(ii)$; $(ii)\ \Rightarrow c=d=9\Rightarrow(2)\Leftrightarrow99=162b$, fals; $(i)\ \Rightarrow c+d=9\Rightarrow(2)\Leftrightarrow9=c\left[b(9-c)-9\right]\Rightarrow c$ este egal cu1, 2 sau 3; dacă $c=1\Rightarrow4b=9$, fals; dacă $c=1\Rightarrow(2)\Leftrightarrow4b=9$, fals; ; dacă $c=9\Rightarrow(2)\Leftrightarrow90=0$, fals; dacă $c=3\Rightarrow(2)\Leftrightarrow b=2\Rightarrow d=6$. Soluția este $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=6$.

Problema 4. Andrei și Vlad joacă următorul joc: din numărul 2019^{2019} ei scad succesiv cubul unui număr natural nenul $n,\ n\le12$. Câștigă jucătorul după mutarea căruia se ajunge la un număr care este un multiplu al lui 13 și este mai mic decât 12^3. Dacă începe Andrei, demonstrați că el poate găsi o strategie care îi permite să câștige, oricare ar strategia lui Vlad.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: Dacă $n\in\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 12\}$, atunci n^3 este de forma: $M_{13}+1,\ M_{13}+5,\ M_{13}+8,\ M_{13}+12$. Pe de alta parte, $2019^{2019}=\left(M_{13}+4\right)^{2019}=M_{13}-1=M_{13}+12$. Pentru ca Vlad să nu poată câștiga, la prima mutare Andrei scade un cub de forma $M_{13}+12$. În continuare, după fiecare mutare a lui Vlad, indiferent de cubul scăzut de acesta ($M_{13}+a, a\in\{1,5,8,12\}$), Andrei scade $M_{13}-a$. Observăm că în acest fel Vlad va fi obligat de fiecare dată să scadă dintr-un număr de forma M_{13}. După un număr finit de pași Andrei obține un număr care este un multiplu al lui 13 și este mai mic decât 12^3.

Problema 5. O mulțime $A\subset\mathbb{R}$ se numește *specială* dacă are cel puțin trei elemente și oricare ar fi $\{a,\ b,\ c\}\subset A$, rezultă $a+b\neq c$. Să se arate că în mulțimea $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 3^8-1\}$ este inclusă o mulțime *specială* *A* care conține 256 elemente.

Vasile Pop

Soluție: De exemplu mulțimea $\{1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 511\}$ este *specială* și conține 256 elemente.