CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VII–a

Problema 1. Să se determine tripletele de numere naturale $(a,\ b,\ c)=1,\ b>c,$ astfel ca numerele $a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b-c$ să fie numere prime.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Problema 2. Determinați toate numerele naturale n pentru care există exact o sută de numere naturale nenule k cu proprietatea: $2\le \frac{n}{k}\le 10.$

prof. Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 3. Fie ΔABC cu $m(\sphericalangle ABC)=40^0$ și $m(\sphericalangle ACB)=80^0$. Pe latura $[AB]$ se consideră punctul D, astfel încât $AD=AC$, iar bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AC în punctul E și dreapta CD în punctul F. Arătați că:

a) $BF=FC$;

b) perimetrul ΔBDF este egal cu lungimea laturii AB.

prof. Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și $AD,\ D\in(BC)$, bisectoarea unghiului BAC. Dacă pe segmentul (AD) există un punct E, astfel încât $m(\sphericalangle EBD)=30^\circ$ și $[ED]\equiv[DB]$, iar $CE\cap AB=\{H\}$, atunci determinați $m(\sphericalangle AHC)$.

prof. Cristina Bornea, Călărași

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 7p; Problema 2. 7p; Problema 3. a) 4p, b) 3p; Problema 4. 7p.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VII–a

Problema 1. Să se determine tripletele de numere naturale $(a,\ b,\ c)=1,\ b>c,$ astfel ca numerele $a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b-c$ să fie numere prime.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: Dacă presupunem că $a,\ b,\ c$ sunt impare, atunci rezultă că $a+b$ și $a+c$ sunt numere prime pare mai mari decât 3, contradicție. Rezultă că $a=2$ sau $c=2$ $(b>2)$. (2p)

1) $a=2,\ b$ și c impare $\Rightarrow b-c$ par, deci $b-c=2$ (1p) $\Rightarrow a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b-c$ numere prime $\Rightarrow c,\ c+2,\ c+4$ numere prime(1p); numerele $c,\ c+2,\ c+4$ sunt diferite modulo 3 rezultă că unul din ele se divide cu $3 \Rightarrow c=3 \Rightarrow (a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 3)$. (2p)

3) $c=2,\ a,\ b$ impare $\Rightarrow a+b$ este par și $a+b>3 \Rightarrow a+b$ nu este prim.(1p)

Problema 2. Determinați toate numerele naturale n pentru care există exact o sută de numere naturale nenule k cu proprietatea: $2 \le \frac{n}{k} \le 10$.

prof. Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: $2 \le \frac{n}{k} \le 10 \Leftrightarrow 2n \le 20k \le 10n$ (1p) $\Rightarrow$ mulțimea $A_n=\{2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ 10n\}$ trebuie să conțină exact 100 de elemente divizibile cu 20 (2p); o condiție necesară este $99<\frac{8n+1}{20}<101 \Leftrightarrow 990 \le 4n \le 1009 \Leftrightarrow$ $n \in \{248,\ 249,\ 250,\ 251,\ 252\}$ (1p); mulțimile $\{x \in A_{248} \mid x \vdots 20\}=\{x \in A_{249} \mid x \vdots 20\}=\{500,\ 520,\ \ldots,\ 2480\}$ și $\{x \in A_{251} \mid x \vdots 20\}=\{520,\ 520,\ \ldots,\ 2500\}$ conțin exact 100 numere; (2p)
mulțimile $\{x \in A_{250} \mid x \vdots 20\}=\{500,\ 520,\ \ldots,\ 2500\}$ și $\{x \in A_{252} \mid x \vdots 20\}=\{520,\ 540,\ \ldots,\ 2520\}$ au 101 elemente; $n \in \{248,\ 249,\ 251\}$.(1p)

Problema 3. Fie ΔABC cu $m(\sphericalangle ABC)=40^0$ și $m(\sphericalangle ACB)=80^0$. Pe latura $[AB]$ se consideră punctul D, astfel încât $AD=AC$, iar bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AC în punctul E și dreapta CD în punctul F. Arătați că:

a) $BF=FC$;

b) perimetrul ΔBDF este egal cu lungimea laturii AB.

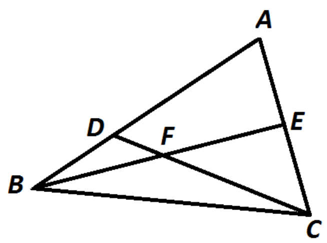
prof. Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: a) $AD=AC$ și $m\left(BAC\right)=60^0 \Rightarrow \triangle ADC$ - echilateral (1p)

$\Rightarrow CD=AD$ și $m\left(BCD\right)=20^0$.(1p)

$[BE$ - bisectoarea $ABC \Rightarrow m\left(CBE\right)=20^0$ (1p) $\Rightarrow \triangle BFC$ - isoscel

$\Rightarrow BF=FC$ (1p)



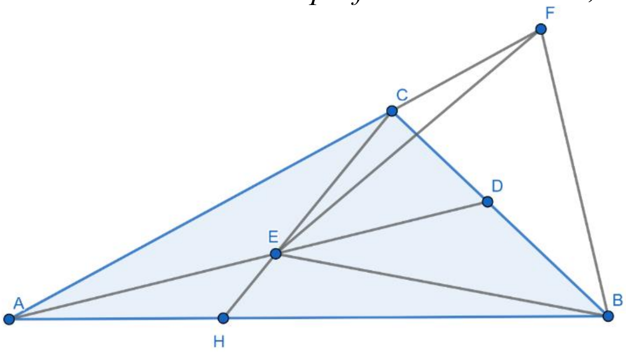
b) $P_{\triangle BDF}=BD+DF+BF$.(1p)

Dar $DF+BF=DC$ și cum $DC=AD \Rightarrow P_{\triangle BDF}=BD+AD=AB.$ (2p)

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și AD, $D \in (BC)$, bisectoarea unghiului BAC. Dacă pe segmentul (AD) există un punct E, astfel încât $m(\sphericalangle EBD) = 30^\circ$ și $[ED] \equiv [DB]$, iar $CE \cap AB = \{H\}$, atunci determinați $m(\sphericalangle AHC)$.

prof. Cristina Bornea, Călărași

Soluție: Fie F simetricul punctului B fata de AD. Cum AD este bisectoare si mediatoare, avem ca F se afla pe latura AC și triunghiul ABF este isoscel. Deoarece AD este mediatoarea segmentului BF, obținem că triunghiul BFE isoscel cu $m(\measuredangle EBF) = 60^\circ$, deci triunghiul BFE este echilateral.(2p)



$$\left.\begin{array}{l}\Delta EBF - \text{echilateral} \\ BC - \text{bisectoare}\end{array}\right\} \Rightarrow BC - \text{mediatoare} \Rightarrow$$

$[CE] \equiv [CF] \Rightarrow \Delta ECF - \text{isoscel}$ (1p)

$m(\measuredangle CFE) = m(\measuredangle CEF)(1p)$

$m(\measuredangle CFE) = m(\measuredangle HBE)$

$m(\measuredangle HEB) = 120^\circ - m(\measuredangle CEF)(1p)$

$m(\measuredangle AHC) = m(\measuredangle HEB) + m(\measuredangle HBE)$ (unghi exterior)

$m(\measuredangle AHC) = 120^\circ (2p)$

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 7p; Problema 2. 7p; Problema 3. a) 4p, b) 3p; Problema 4. 7p.