INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAȘI

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VI–a

Problema 1. Numerele naturale nenule se scriu într-un tabel. Primele linii ale tabelului sunt completate ca în desenul de mai jos și regula se păstrează pentru toate liniile care se scriu.

linia 1	1								
linia 2	2	3	4						
linia 3	5	6	7	8	9				
linia 4	10	11	12	13	14	15	16		
linia 5	17	18	19	…	…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) Calculează suma numerelor scrise în linia 10.

b) Care este numărul liniei care conține numărul 2018 ? (*justifică răspunsul*)

prof. Adriana Constantin

Problema 2. Ștefan desenează pe o foaie 4 cercuri roșii, 5 cercuri galbene și 6 cercuri albastre. Apoi șterge două cercuri de culori diferite și desenează, în locul lor, un cerc de a treia culoare. Repetă această operație până când pe foaie mai rămâne un singur cerc.

a) De câte ori repetă Ștefan operația ?

b) Ce culoare are cercul rămas pe foaie ?

prof. Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 3. Toți elevii unei școli de muzică sunt înscriși la cel puțin una din grupele care studiază pianul, vioara sau flautul. Într-un proiect școlar, un grup de elevi a ajuns la următoarele concluzii:

a) Zece elevi studiază pianul și vioara.

b) Opt elevi studiază flautul și vioara.

c) Cinci elevi studiază pianul și flautul.

d) Doi elevi studiază toate cele trei instrumentele.

e) Numărul elevilor care studiază un instrument este același, indiferent de instrument.

f) Când s-au format orchestre camerale de câte 4 sau de câte 5 elevi , a rămas de fiecare dată un elev care nu a putut face parte din orchestră.

g) Numărul elevilor din școală este cel mai mic număr posibil care verifică toate condițiile anterioare.

Câți elevi sunt la școala de muzică?

prof. Gabriela Ruse, Călărași

Problema 4. Se consideră mulțimea $A=\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2018\}$.

a) Să se arate că există o submulțime B a lui A, cu 673 de elemente, astfel încât pentru oricare două elemente x și y din B cu $x>y$, $x+y$ nu este divizibil cu $x-y$

b) Să se demonstreze că nu există o submulțime C a lui A, cu 674 de elemente, care îndeplinește condițiile de la punctul **a)**.

prof. Relu Ciupea, Oltenița

Problema 5. Pentru fiecare pereche de numere naturale $(a,\ b)$, $1\le a<b$, se consideră mulțimea $M_{a,b}=\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,a^2\le k\le b^2\right\}$. Să se determine toate perechile de numerele naturale $(a,\ b)$ pentru care exact 2% dintre elementele mulțimii $M_{a,b}$ sunt pătrate perfecte.

prof. Vasile Pop, Cluj-Napoca

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 2p, b) 2p; Problema 2. a) 1p, b) 2p; Problema 3. 7p; Problema 4. a) 4p, b) 3p; Problema 5. 7p.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VI–a

Problema 1. Numerele naturale nenule se scriu într-un tabel. Primele linii ale tabelului sunt completate ca în desenul de mai jos și regula se păstrează pentru toate liniile care se scriu.

linia 1	1								
linia 2	2	3	4						
linia 3	5	6	7	8	9				
linia 4	10	11	12	13	14	15	16		
linia 5	17	18	19	…	…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) Calculează suma numerelor scrise în linia 10.

b) Care este numărul liniei care conține numărul 2018 ? (*justifică răspunsul*)

prof. Adriana Constantin

Soluție: a) $82+83+\ldots+100=19\cdot 82+1+2+\ldots+18=19\cdot 82+19\cdot 9=19\cdot 91=1729$; (2p) **b)** Se observă că cel mai mare element din *linia* k este k^2 și cel mai mic este $(k-1)^2+1$. Din $44^2+1=1937<2018<2025=45^2$ rezultă că 2018 este în linia 45.(2p)

Problema 2. Ștefan desenează pe o foaie 4 cercuri roșii, 5 cercuri galbene și 6 cercuri albastre. Apoi șterge două cercuri de culori diferite și desenează, în locul lor, un cerc de a treia culoare. Repetă această operație până când pe foaie mai rămâne un singur cerc.

a) De câte ori repetă Ștefan operația ?

b) Ce culoare are cercul rămas pe foaie ?

prof. Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a) Sunt, în total, 15 cercuri, iar după fiecare operație numărul de cercuri scade cu 1, deci repetă operația de 14 ori.(1p) **b)** Inițial sunt un număr par de cercuri roşii, un număr impar cercuri galbene și un număr par cercuri albastre. După prima operație se schimbă paritatea numărului de cercuri, iar după a doua operație paritatea numărului de cercuri coincide cu cea inițială. După 14 operaţii paritatea rămâne aceeaşi coincide cu cea inițială și sunt 0 cercuri roşii, 1 cerc galben, 0 cercuri albastre.(2p)

Problema 3. Toți elevii unei școli de muzică sunt înscriși la cel puțin una din grupele care studiază pianul, vioara sau flautul. Într-un proiect școlar, un grup de elevi a ajuns la următoarele concluzii:

a) Zece elevi studiază pianul și vioara.

b) Opt elevi studiază flautul și vioara.

c) Cinci elevi studiază pianul și flautul.

d) Doi elevi studiază toate cele trei instrumentele.

e) Numărul elevilor care studiază un instrument este același, indiferent de instrument.

f) Când s-au format orchestre camerale de câte 4 sau de câte 5 elevi , a rămas de fiecare dată un elev care nu a putut face parte din orchestră.

g) Numărul elevilor din școală este cel mai mic număr posibil care verifică toate condițiile anterioare.

Câți elevi sunt la școala de muzică?

prof. Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: Dacă f este mulțimea elevilor care studiază flautul, p este mulțimea elevilor care studiază pianul și v este mulțimea elevilor care studiază vioara atunci: $|p\cap v|=10$, $|f\cap v|=8$, $|f\cap p|=5$, $|f\cap p\cap v|=2$, $|f|=|p|=|v|=a$, unde a este număr natural (1p). Dacă $|f\cup p\cup v|=n$, atunci $4|(n-1)$ și $5|(n-1)\Rightarrow 20|(n-1)$, deci există k număr natural astfel încât $n=20k+1$ (1). (1p) Cum $|f\cup p\cup v|=|f|+|p|+|v|-|f\cap p|-|v\cap p|-|f\cap v|+|f\cap p\cap v|$,(3p) rezultă $n=3a-21\Rightarrow 3|n$ (2). Din (1), (2) și n cel mai mic număr cu proprietățile respective rezultă $n=81$. (2p)

Problema 4. Se consideră mulțimea $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2018\}$.

a) Să se arate că există o submulțime B a lui A, cu 673 de elemente, astfel încât pentru oricare două elemente x și y din B cu $x>y$, $x+y$ nu este divizibil cu $x-y$

b) Să se demonstreze că nu există o submulțime C a lui A, cu 674 de elemente, care îndeplinește condițiile de la punctul **a)**.

prof. Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) Considerăm mulțimea $B=\{1,4,7,...,2017\}$ care are 673 de elemente.(2p) Orice element al său este de forma $3k+1$, deci diferența oricăror două elemente x și y din B cu $x>y$, este multiplu de 3. Pe de altă parte, suma oricăror două elemente din B este de forma $3k+2$, deci $x+y$ nu este divizibil cu $x-y$.(2p) **b)** Presupunem că există o submulțime C a lui A, cu 674 de elemente, care îndeplinește condițiile de la punctul a). Considerăm mulțimile disjuncte: $\{1,2,3\};\{4,5,6\};...;\{2014,2015,2016\};\{2017,2018\}$ a căror reuniune este mulțimea A. Deoarece sunt 673 de submulțimi iar C are 674 de elemente, conform principiului lui Dirichlet, există o submulțime unde se află două elemente x și y din C astfel încât suma lor nu este divizibilă cu diferența lor. (1p)Se observă că cele două elemente nu se pot afla în ultima submulțime, deoarece diferența lor este 1 și evident divide suma lor. Dacă cele două elemente s-ar afla în una din celelalte 672 de submulțimi rămase, de forma $\{a,a+1,a+2\}$ atunci sau ar fi consecutive, caz în care diferența lor ar fi 1 și ar divide suma lor, sau nu ar fi consecutive, caz în care diferența lor ar fi 2 deci cele două numere ar avea aceeași paritate și de asemenea 2 ar divide suma lor. Rezultă că nu există o submulțime C a lui A, cu 674 de elemente, care îndeplinește condițiile de la punctul a).(2p)

Problema 5. Pentru fiecare pereche de numere naturale $(a,\ b)$, $1\le a<b$, se consideră mulțimea $M_{a,b}=\{k\in\mathbb{N}\,|\,a^2\le k\le b^2\}$. Să se determine toate perechile de numerele naturale $(a,\ b)$ pentru care exact 2% dintre elementele mulțimii $M_{a,b}$ sunt pătrate perfecte.

prof. Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluție: Mulțimea $M_{a,b}$ are b^2-a^2+1 elemente (1p) dintre care sunt pătrate perfecte a^2, $(a+1)^2$, $(a+2)^2$, …, b^2,(1p) deci $b-a+1$ dintre elementele mulțimii $M_{a,b}$ sunt pătrate perfecte. (1p)

$$\frac{b-a+1}{b^2-a^2+1}=\frac{1}{50}\ \text{(1p)}$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(b+a-50)=49 \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a-50=49 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=7 \\ b+a-50=7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=49 \\ b+a-50=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=49 \\ b=50 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=25 \\ b=32 \end{cases}$$

$$\text{sau } \begin{cases} a=1 \\ b=50 \end{cases}.\ \text{(3p)}$$

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 2p, b) 2p; Problema 2. a) 1p, b) 2p; Problema 3. 7p; Problema 4. a) 4p, b) 3p; Problema 5. 7p.