CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VII–a

Problema 1.

a) Scrie numărul natural 1 ca suma inverselor a trei numere naturale nenule și distincte.

b) Arată că oricare ar fi $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, există numerele naturale nenule și distincte două câte două $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$

Problema 2. Pentru un număr natural fixat $n \geq 1$ se consideră toate numerele raționale de forma $\frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$ cu proprietatea: $\frac{n-1}{n}<\frac{p}{q}<\frac{n}{n+1}$.

Dacă $S = p+q$, determină valoarea minimă a lui S.

Problema 3. Pe perpendiculara în B pe latura $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC se consideră punctul M astfel încât $BM = BC$, iar pe perpendiculara în C pe $[BC]$ se consideră punctul N astfel încât $CN = BC$, M și N în același semiplan cu A față de BC. Dacă $MC \cap AB = \{P\}$, demonstrați că:

a) $MP = AN$;

b) $NP \perp AC$.

Problema 4. Fie P un poligon convex cu 2017 laturi, p perimetrul său și d suma diagonalelor sale. Arată că $d > 1007p$.

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 3p, b) 4p; Problema 2. 7p; Problema 3. a) 3p, b) 4p; Problema 4. 7p.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VII–a

Problema 1.

a) Scrie numărul natural 1 ca suma inverselor a trei numere naturale nenule și distincte.

b) Arată că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, există numerele naturale nenule și distincte două câte două $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$

prof. Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$ (3p)

b) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1 \Rightarrow ....$ (2p)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}} \overset{3)}{=} \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}} \overset{2)}{+} \frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}=1$$ (2p)

Problema 2. Pentru un număr natural fixat $n \geq 1$ se consideră toate numerele raționale de forma $\frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$ cu proprietatea: $\frac{n-1}{n}<\frac{p}{q}<\frac{n}{n+1}$.

Dacă $S=p+q$, determină valoarea minimă a lui S.

prof. Vasile Pop, Cluj

Soluție:

$\frac{n-1}{n}<\frac{p}{q}<\frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n}+1<\frac{p}{q}+1<\frac{n}{n+1}+1 \Leftrightarrow (2n-1)q+1 \leq n(p+q)(1)$ și

$(n+1)(p+q)+1 \leq q(2n+1)(2)$ (2p)

$(1) \Leftrightarrow (2n-1)(2n+1)q+2n+1 \leq n(2n+1)(p+q)(3);$

$(2) \Leftrightarrow (2n-1)(n+1)(p+q)+2n-1 \leq q(2n+1)(2n-1)(4)$

(3) și (4) $\Rightarrow (2n-1)(2n+1)q+2n+1+(2n-1)(n+1)(p+q)+2n-1 \leq n(2n+1)(p+q)+q(2n+1)(2n-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2n^2+n-1)(p+q)+4n \leq (2n^2+n)(p+q) \Leftrightarrow p+q \geq 4n$ (3p)

Dacă $p=2n-1$ și $q=2n+1$, atunci $\frac{n-1}{n}<\frac{p}{q}<\frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n-1)(2n+1)<n(2n-1)$ și $(n+1)(2n-1)<n(2n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1<0;$ adevărat. Rezultă că valoarea minimă a lui S este $4n$. (2p)

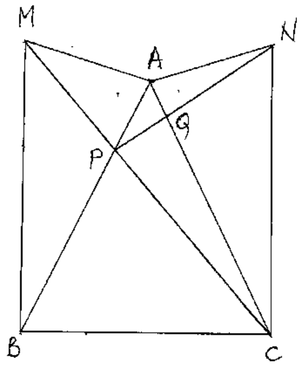
Problema 3. Pe perpendiculara în B pe latura $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC se consideră punctul M astfel încât $BM=BC$, iar pe perpendiculara în C pe $[BC]$ se consideră punctul N astfel încât $CN=BC, M$ și N în același semiplan cu A față de BC. Dacă $MC \cap AB=\{P\}$, demonstrați că:

a) $MP=AN;$

b) $NP \perp AC.$

prof. Sorin Furtună

Soluție:



a) $m(\angle ABM) = m(\angle ACN) = 30°$

$\Delta ABM \equiv \Delta ACN\ (LUL) \Rightarrow [AM] \equiv [AN]$ (1p)

$m(\angle BMP) = 45° \Rightarrow m(\angle AMP) = 30°$

$\Rightarrow m(\angle MPA) = 75° \Rightarrow \Delta MAP$ este isoscel (1p)

$\Rightarrow [MA] \equiv [MP] \Rightarrow [AN] \equiv [MP]$ (1p)

b) $\Delta BCP \equiv \Delta NCP\ (LUL)$ (2p)

$\Rightarrow m(\angle NPC) = m(APC) = 75°$

$m(\angle PCQ) = 15° \Rightarrow m(\angle PQC) = 90°.$ (2p)

Problema 4. Fie P un poligon convex cu 2017 laturi, p perimetrul său și d suma diagonalelor sale. Arată că $d > 1007p$.

prof. Vasile Pop, Cluj

Soluție:

Vom rezolva problema pentru un poligon cu $n \geq 3$ laturi și $N = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonale. (2p)

Notăm vârfurile poligonului $A_1, A_2, ..., A_n$ $(A_k = A_{n+k})$ și considerăm

diagonalele $A_p A_k$ și $A_{p+1}A_{k+1}$ care se intersectează în punctul B.

Aplicam inegalitatea triunghiului în triunghiurile $A_p B A_{p+1}$ și $A_k B A_{k+1}$ și avem:

$BA_P + BA_{P+1} > A_P A_{P+1},\ BA_k + BA_{k+1} > A_k A_{k+1}$.

Adunând aceste inegalități, obținem: $A_p A_k + A_{p+1}A_{k+1} > A_p A_{p+1} + A_k A_{k+1}$. (3p)

Dacă adunăm aceste inegalități după toate diagonalele $D_{p,q} = A_p A_q$,

fiecare diagonală se adună de două ori și fiecare latură se adună de $(n-3)$ ori,

astfel că rezultă inegalitatea $2d > (n-3)p$.

În cazul $n = 2017$ rezultă $2d > 2014p \Leftrightarrow d > 1007p$. (2p)

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 3p, b) 4p; Problema 2. 7p; Problema 3. a) 3p, b) 4p; Problema 4. 7p.