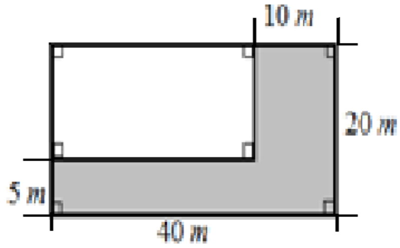
CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VI–a

Problema 1. Arată că numărul $\overline{abba}$ este divizibil cu 11.

Problema 2. Desenul alăturat reprezintă schița unei clădiri în formă de „L” (suprafața gri) și curtea acesteia (dreptunghiul de culoare albă). Folosind dimensiunile date în desen, determină aria curții.



Problema 3. Dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{10}{3}$, atunci determină toate valorile pe care le poate avea suma $x+y+z$.

Problema 4. Într-un sistem solar sunt 2017 planete și știi că distanțele dintre ele sunt diferite două câte două.

a) Într-un catalog sunt scrise distanțele dintre oricare două planete ale acestui sistem solar. Câte numere diferite se pot citi din acest catalog.

b) Pe fiecare planetă se află un astronom care se uită prin telescop la planeta cea mai apropiată. Demonstrează că există o planetă la care nu se uită nimeni.

Problema 5. Dacă știi că mulțimea $A=\{a, b, c, d\}\subset\mathbb{Q}_+$ și că cele mai mari elemente ale mulțimii $B=\{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d\}$ sunt 9, 10, 12, 13, atunci determină ce valori poate să aibă cel mai mare element al mulțimii A.

Problema 6. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, și mulțimea $M=\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$. Determină numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o mulțime $A\subset M$ care are proprietatea că pentru oricare două elemente $x, y\in A$, $x>y$, numărul $x-y$ nu este prim.

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 15p; Problema 2. 15p; Problema 3. 15p; Problema 4. a) 5p, b) 10p; Problema 5. 15p; Problema 6. 15p. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VI–a

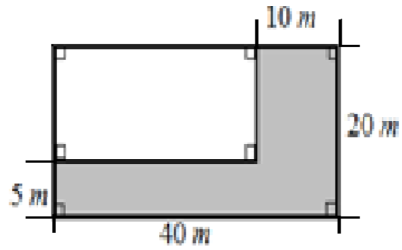
Problema 1. Arată că numărul $\overline{abba}$ este divizibil cu 11.

$\overline{abba}=1001a+110b$ $(7p)$

Soluție: $\overline{abba}=11\cdot(91a+10b)$ $(5p)$

$\Rightarrow \overline{abba}\,\vdots\,11$ $(3p)$

Problema 2. Desenul alăturat reprezintă schița unei clădiri în formă de „L” (suprafața gri) și curtea acesteia (dreptunghiul de culoare albă). Folosind dimensiunile date în desen, determină aria curții.



Soluție:

Lungime = 40*m* -10*m* = 30*m* (4p)

Lățime = 20*m* - 5*m* = 15*m* (4p)

$A=L\cdot l$ (4p)

$A=30m\cdot 15m=450m^2$ (3p)

Problema 3. Dacă $x,\ y,\ z\in\mathbb{N}^*$ și $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{10}{3}$, atunci determină toate valorile pe care le poate avea $x+y+z$.

Soluție:

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{3}\Rightarrow x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=3+\frac{1}{3}\Rightarrow x\le 3 \quad (5p)$$

$$\text{Pentru } x=3\Rightarrow \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases} y=2 & (4p)\\ z=1 & (3p)\end{cases}$$

$$x+y+z=6 \quad (1p)$$

$$\text{Dacă } x\in\{1,2\}\Rightarrow y+\frac{1}{z}<1 \text{ dar } y+\frac{1}{z}\ge 2\Rightarrow \text{imposibil} \quad (2p)$$

Soluţie unică: $x+y+z=6$

Problema 4.Într-un sistem solar sunt 2017 planete, astfel încât distanțele dintre ele sunt diferite două câte două.

a) Într-un catalog sunt scrise distanțele dintre oricare două planete ale acestui sistem solar. Câte numere, diferite două câte două, se pot citi din acest catalog.

b) Pe fiecare planetă se află un astronom care se uităprin telescop la planeta cea mai apropiată. Arătați că există o planetăla care nu se uită nimeni.

Soluție:

1+2+3+…+2016= (3p)

=1008·2017=2 033 136 (2p)

b)Există două planete, o să le numim în continuare A și B, cu proprietatea că distanța dintre ele este cel mai mic număr care reprezintă distanța dintre două planete ale sistemului solar. Astronomul de pe planeta A se uită la planeta B iar cel de pe planeta B se uită la planeta A . (3p)

Printre cele 2015 planete rămase există două planete, o să le numim în continuare C și D, cu proprietatea că distanța dintre ele este mai mică decât distanța dintre oricare alte două planete.

Astronomul de pe planeta C se uită la una din planetele A, B, sau D iar cel de pe planeta D se uită la una din

planetele A, B, sau C. (2p)
Rămân în discuție 2013 planete . Repetând raționamentul de 1006 ori ajungem la concluzia că, în final, există o planetă la care nu se uită nimeni. (5p)

Problema 5. Dacă știi că mulțimea $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}\subset\mathbb{R}_+$ și că cele mai mari elemente ale mulțimii $B=\{a+b,\ a+c,\ a+d,\ b+c,\ b+d,\ c+d\}$ sunt 9, 10, 12, 13, atunci determină ce valori poate să aibă cel mai mare element al mulțimii A.

Soluție: Putem să presupunem că $a<b<c<d$. Este posibil numai unul din următoarele două cazuri:

I. $a+b<a+c<a+d<b+c<b+d<c+d$;

II. $a+b<a+c<b+c<a+d<b+d<c+d$. (5p)

În cazul **I.** rezultă că $a+d=9(1);\ b+c=10(2);\ b+d=12(3);\ c+d=13(4)$. Din (1) și (2) rezultă că $a+b+c+d=19(5)$, iar din(1), (2), (3) și (4) rezultă că $a+2b+2c+3d=44(6)$. Din (5) și (6) rezultă că $b+c+2d=25$ de unde, dacă se ține cont de (2) rezultă că $d=7{,}5$. (5p)

În cazul **II.** rezultă că $b+c=9(7);\ a+d=10(8);\ b+d=12(9);\ c+d=13(10)$. Din (7) și (8) rezultă că $a+b+c+d=19(11)$, iar din(7), (8), (9) și (10) rezultă că $a+2b+2c+3d=44(12)$. Din (11) și (12) rezultă că $b+c+2d=25$ de unde, dacă se ține cont de (7) rezultă că $d=8$. (5p)

În concluzie, cel mai mare element din mulțimea A poate să aibă valoarea 7,5 sau 8.

Problema 6. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, și mulțimea $M=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2^n\}$. Determină numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o mulțime $A\subset M$ care are proprietatea că pentru oricare două elemente $x,\ y\in A,\ x>y,$ numărul $x-y$ nu este prim.

prof. Vasile Pop, Cluj

Soluție: Dacă $A\subset M$ are proprietatea din enunț și $k\in A,$ atunci numerele $k+2,\ k+3,\ k+5,\ k+7\notin A.$ (3p)
Dintre numerele $k+1,\ k+4$ și $k+6$ cel mult unul aparține lui $A.$ În concluzie, dacă $A\subset M$ are proprietatea din enunț , dintre oricare opt numere consecutive care aparțin mulțimii M cel mult două aparțin mulțimii $A.$ (3p)
Dacă notăm cu N_n numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o mulțime $A\subset M$ are proprietatea din enunț rezultă $N_n\leq 2\cdot\frac{2^n}{8}=2^{n-2}.$ (3p)

Mulțimea $A=\{4,\ 8,\ 12,\ \ldots,\ 2^n\}=\{4k\,|\,k\in\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2^{n-2}\}\}$ este inclusă în mulțimea M și oricare ar fi două elemente $x,\ y\in A,\ x>y,$ numărul $x-y$ este divizibil cu 4, deci nu este prim. Pentru că numărul de elemente al mulțimii $A=\{4,\ 8,\ 12,\ \ldots,\ 2^n\}$ este egal cu 2^{n-2} rezultă $N_n=2^{n-2}.$ (6p)

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 15p; Problema 2. 15p; Problema 3. 15p; Problema 4. a) 5p, b) 10p; Problema 5. 15p; Problema 6. 15p. Se acordă 10 puncte din oficiu.