



CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a V–a

P1. a) În *tabelul 1* suma numerelor de pe linie este egală cu numărul scris în ultima celulă ($7 + 4 + 7 + 9 = 27$ și $10 + 9 + 9 + 6 = 34$) și suma numerelor de pe coloană este egală cu numărul scris în celula de jos ($7 + 10 = 17$, $4 + 9 = 13$, $7 + 9 = 16$

7	4	7	9	27
10	9	9	6	34
17	13	16	15	

tabelul 1

tabelul 2

și $9 + 6 = 15$). Copiază pe foaia de concurs *tabelul 2* și completează cu numere naturale celulele goale astfel încât să fie respectate proprietățile de la *tabelul 1* (suma numerelor de pe linie să fie egală cu numărul scris în ultima celulă și suma de pe coloană să fie egală cu numărul scris în celula de jos).

b) Un număr natural se numește „*actul*” dacă prin ștergerea primelor trei cifre ale numărului se obține un număr de 2016 ori mai mic. Găsește un număr „*actual*”.

Adriana Constantin, Călărași

Soluție

- a) Suma numerelor celor trei numere scrise în celule de jos trebuie să fie egală cu suma celor două numere scrise în celule din dreapta.
b) 4032.

P2. Fie n un număr natural nenul. O firmă intenționează să construiască, de aceeași parte a unei străzi, n case care vor purta numerele 1, 2, 3, ..., n . Casele pot fi din cărămidă sau din lemn. Normele prevăd că se pot construi case din lemn la cel mult trei numere consecutive. Dacă C_n este numărul de variante pe care le are la dispoziție firma de construcții pentru a construi n case (de exemplu: $C_1 = 2$, pentru că la numărul 1 se poate construi o casă din cărămidă sau din lemn, $C_2 = 4$ pentru că cele două case construite la numerele 1 și 2 pot fi ambele din cărămidă, prima din cărămidă și a doua din lemn, prima din lemn și a doua din cărămidă, ambele din lemn etc.), atunci determină numerele C_3 , C_4 și C_{10} .

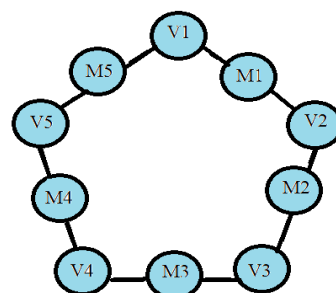
Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție

$C_3 = 2^3 = 8$; $C_4 = 2^4 - 1 = 15$; Dacă L_n este numărul variantelor în care la n numere consecutive se construiesc case din lemn, atunci $C_{10} = 2^{10} - (L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 + L_{10}) = 1024 - (141 + 62 + 28 + 12 + 5 + 2 + 1) = 773$.
 $L_4 = 31 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 - 1 = 141$ (vezi tabelul de mai jos), $L_5 = 15 + 8 + 8 + 8 + 8 + 15 = 62$ etc.

nr. casă nr. variantă	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total variante
1.											31
2.											16
3.											16
4.											16
5.											16
6.											16
7.											31

P3. În cele 10 cercuri din desenul alăturat trebuie să scrii numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 astfel încât să fie adevărată următoarea afirmație: „Există un număr S astfel încât, dacă $V_1, M_1, V_2, M_2, V_3, M_3, V_4, M_4, V_5$ și M_5 sunt numerele pe care le scrii în cercurile respective, atunci $S = V_1 + M_1 + V_2 = V_2 + M_2 + V_3 = V_3 + M_3 + V_4 = V_4 + M_4 + V_5 = V_5 + M_5 + V_1$ ”. Care este cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua S ? (justifică răspunsul)



Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Fie V suma numerelor din vârfuri și M suma numerelor din mijloacele laturilor. Avem:

$$V + M = 1 + 2 + \dots + 10 = 55. \quad (1)$$

Pe de altă parte dacă notăm cu L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 suma numerelor de pe laturi, avem:

$$2V + M = 5S \quad (2)$$

(fiecare vârf se adună de două ori).

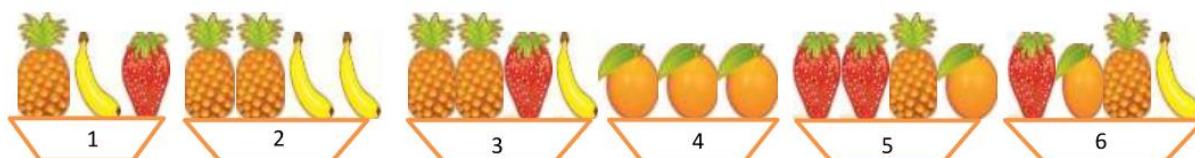
Din relația (2) rezultă că suma este maximă când V este maxim și suma este minimă când V este minim.

$$V_{\min} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad M = 40 \quad \text{și} \quad S_{\min} = 14$$

$$V_{\max} = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40, \quad M = 15 \quad \text{și} \quad S_{\max} = 19.$$

Repartițiile numerelor sunt: Pentru $S_{\min}$ în vârfuri 1, 3, 5, 2, 4 pe laturi 10, 6, 7, 8, 9. Pentru $S_{\max}$ în vârfuri 10, 8, 6, 9, 7 și pe laturi 1, 5, 4, 3, 2.

P4. Pe șase platouri sunt așezate banane, căpșuni, portocale și fructe de ananas, ca în desenul de mai jos.



Dacă:

- prețul unui fruct este un număr natural;
- toate fructele de același tip au același preț;
- două fructe diferite au prețuri diferite;
- sumele prețurilor fructelor așezate pe două platouri diferite sunt numere diferite;
- suma prețurilor fructelor așezate pe oricare din cele șase platouri este unul din numerele 21, 30, 33, 36, 39 și 45 (atenție, nu știi dacă ordinea numerelor coincide cu ordinea platourilor).

Arată că o căpșună nu poate să coste 3 lei.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: notez cu a prețul unui ananas, cu b prețul unei banane, cu c prețul unei căpșune și cu p prețul unei portocale; a este diferența dintre suma prețurilor fructelor așezate platoul 3 și suma prețurilor fructelor așezate platoul 1, deci a este unul din numerele 3, 6, 9, 12, 15, 18 și 24; $2a + 2b = 30$ sau $2a + 2b = 36$; $2a + 2b \leq 36 \Rightarrow a < 18 \Rightarrow a \leq 15$;

Dacă presupunem $c = 3$ rezultă că a este unul din numerele 6, 9, 12, și 15.

- presupunem $a = 6$ și $2a + 2b = 30 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a + b + c = 18$, fals;
- presupunem $a = 6$ și $2a + 2b = 36 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a + b + c = 27$, fals;
- presupunem $a = 9$ și $2a + 2b = 30 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b + c = 18$, fals;
- presupunem $a = 9$ și $2a + 2b = 36 \Rightarrow b = 9$, fals;
- presupunem $a = 12$ și $2a + 2b = 30 \Rightarrow b = 3$, fals;
- presupunem $a = 12$ și $2a + 2b = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b + c = 21$ și $2a + b + c = 33$, deci sumele prețurilor fructelor așezate platoul 5 și 6 sunt două dintre numerele 30, 39, 45; suma prețurilor fructelor așezate platoul 6 este $p + 21$ iar a celor așezate platoul 5 este $p + 18$, deci diferența prețurilor celor două platouri este 3, fals;
- presupunem $a = 15$ și $2a + 2b = 30 \Rightarrow b = 0$, fals;
- presupunem $a = 15$ și $2a + 2b = 36 \Rightarrow b = 3$, fals;

Rezultă $c \neq 3$.

Notă: $a = 12$, $b = 3$, $c = 6$, $p = 15$ verifică ipotezele problemei și este singura soluție.



CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VI-a

P1. a) Din mulțimea tuturor tripletelor de numere naturale consecutive, care sunt prime două câte două, determină tripletul format din cele mai mici trei numere a căror sumă este divizibilă cu 47.

b) Determină cele mai mici patru numere naturale consecutive a căror sumă este un număr natural de 4 cifre distincte format doar din cifrele numărului 2015.

c) Există o submulțime S a mulțimii $M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ care să aibă 43 de elemente și produsul elementelor sale să fie pătrat perfect? (justifică răspunsul)

Luminița Bucureșteanu și Sorin Furtună, Călărași

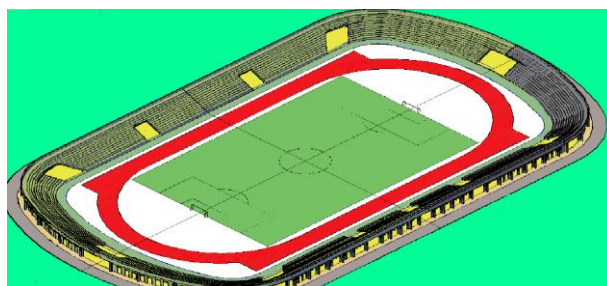
Soluție

a) numerele sunt de forma $2k-1, 2k, 2k+1$; $47|6k \Rightarrow 2k \geq 94$; numerele sunt 93, 94, 95;

b) dacă $x, x+1, x+2, x+3$ sunt numerele căutate și S este suma lor rezultă $4|S-6$; cerințele problemei sunt satisfăcute pentru $S=1250$; numerele sunt: 311, 312, 313, 314.

c) Condiția necesară ca produsul elementelor submulțimii S să fie pătrat perfect este ca acesta să nu conțină un multiplu al lui 13 și numerele 29, 31, 37, 41, 43, 47. Produsul elementelor mulțimii $M \setminus \{26, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ este $(2^{23} \cdot 3^{11} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23)^2$.

P2. Pe pista de atletism a stadionului din desenul alăturat aleargă, de plăcere, 53 de oameni. Toți aleargă în același sens și suma vârstelor celor 53 de alergători este 2015 ani. La un moment dat, nu există doi alergători la egalitate și ei sunt răspândiți pe toată lungimea pistei. Arată că, la acest moment, există un cel puțin un alergător pentru care suma dintre vârsta lui, vârsta alergătorului plasat exact în spatele său și a celui care aleargă exact în fața sa este un număr mai mare decât 114.



Gabriela Ruse, Călărași

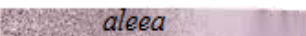
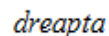
Soluție

La momentul respectiv se fixează un alergător și se numerotează pozițiile, în sensul în care se aleargă, cu $1, 2, \dots, 53$. Notăm vârsta alergătorului care aleargă în poziția n cu a_n , $n \in \{1, 2, \dots, 53\}$. Presupunem că:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \leq 114, \quad n = \overline{1, 51}, \quad a_{52} + a_{53} + a_1 \leq 114, \quad a_{53} + a_1 + a_2 \leq 114 \Rightarrow$$

$$3(a_1 + a_2 + \dots + a_{53}) \leq 53 \cdot 114 \Rightarrow 6045 \leq 6042, \text{ contradicție.}$$

P3. O alee de lățime 1 metru și lungime n metri ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) se pavează cu n plăci pătrate care au lungimea laturii de 1 metru, fiecare fiind albă sau neagră. O pavare este bună dacă pentru orice placă din cele n , placa din dreapta ei este neagră sau placa din stânga ei este albă (vezi desenul alăturat). Câte pavări bune se pot face pentru un n dat?

stânga  aleea  dreapta

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Deoarece înaintea primei plăci (în stânga) nu există altă placă (albă) rezultă că a doua placă va fi cu siguranță neagră. Deoarece în dreapta ultimei plăci nu există altă placă (neagră) rezultă că penultima placă va fi cu siguranță albă. Vom arăta că singura pavare bună este cu plăci de culori alternante negru, alb, negru, alb, ..., negru, alb și în consecință n trebuie să fie număr par și există o singură pavare bună.

Dacă prin absurd prima placă ar fi neagră (ca și a doua), atunci în stânga plăcii a doua nu e placă albă deci în dreapta avem placă neagră (astfel că primele trei plăci ar fi negre). Raționând la fel cu plăcile negre a doua și a treia rezultă că și a patra placă este neagră și în mod analog ar rezulta că și a $(n - 1)$ placă (penultima) ar fi neagră, ceea ce am văzut că este fals. În concluzie prima placă este albă și a doua este neagră. Dacă a treia placă ar fi neagră avem plăcile consecutiv doi și trei negre și ca la raționamentul anterior ar rezulta că următoarele (inclusiv penultima) ar fi negre. Astfel că primele trei sunt alb, negru, alb și nu pot exista două consecutive de aceeași culoare. Cum a $(n - 1)$ placă este albă rezultă că $(n - 1)$ este impar deci n este par.

P4. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3$, $a + b \mid ab + 1$ și $a - b \mid ab - 1$, arătați că $a^2 \leq 2(b^2 - 1)$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție

$$\text{Demonstrație: } \left. \begin{matrix} d' \mid a \\ d' \mid b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d' \mid a + b \\ d' \mid ab \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d' \mid ab + 1 \\ d' \mid ab \end{matrix} \right\} \Rightarrow d' \mid 1 \Rightarrow (a, b) = 1; \quad \left. \begin{matrix} d \mid a + b \\ d \mid a - b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \\ (a, b) = 1 \\ d \text{ impar} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a - b, a + b) = 1 \quad (1); \quad \left. \begin{matrix} a + b \mid (a + b)b \\ a + b \mid ab + 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + b \mid (a + b)b - (ab + 1) \Rightarrow a + b \mid b^2 - 1 \quad (2);$$

$$\left. \begin{matrix} a - b \mid ab - 1 \\ a - b \mid (a - b)b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a - b \mid (ab - 1) - b(a - b) \Rightarrow a - b \mid b^2 - 1 \quad (3); \text{ din } (1), (2) \text{ și } (3) \Rightarrow a^2 - b^2 \mid b^2 - 1 \text{ și}$$

$$b^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 \leq b^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 + 1 \leq 2b^2 \quad (4); \quad a^2 + 1 \text{ impar, } 2b^2 \text{ par si } (4) \Rightarrow a^2 + 2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 2(b^2 - 1).$$



CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VII-a

P1. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se consideră propoziția:

„Mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ admite două submulțimi B și C care au proprietățile:

1. fiecare din mulțimile B și C conține cel puțin două elemente;
2. $B \cup C = A$;
3. $B \cap C$ este mulțimea vidă;
4. suma elementelor mulțimii B este egală cu produsul elementelor mulțimii C .”

Arătați că:

- a) dacă $n = 4$, atunci propoziția este falsă;
- b) pentru orice $n \geq 5$, propoziția este adevărată.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție:

- a) pentru niciuna din cele 6 partiții cu proprietățile 1., 2. și 3. nu este adevărată proprietatea 4. ;
- b)

$$\text{i) } k \in \mathbb{N}, k \geq 3 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 2k - [1 + (k-1) + 2k] = k(2k+1) - 3k = 1 \cdot (k-1) \cdot 2k$$

$$\text{ii) } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + (2k+1) - (1+k+2k) = (k+1)(2k+1) - 3k - 1 = 1 \cdot k \cdot 2k$$

P2. Găsește toate perechile de numere naturale nenule (n, m) cu proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}$.

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: dacă $n = m \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow n = m = 50$; dacă $n \neq m$ putem presupune $n < m$; presupunem

$$n \geq 50 \Rightarrow m > 50 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{25}, \text{ fals} \Rightarrow n < 50 \leq m; \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow (n-25)(m-25) = 5^4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n-25=1 \\ m-25=5^4 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} n-25=5 \\ m-25=5^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=26 \\ m=650 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} n=30 \\ m=150 \end{cases}; \text{ perechile de numere naturale nenule } (n, m) \text{ cu}$$

proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}$, sunt: $(50, 50)$, $(26, 650)$, $(650, 26)$, $(30, 150)$, $(150, 30)$.

P3. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3$, $a+b \mid ab+1$ și $a-b \mid ab-1$, arătați că $a^2 \leq 2(b^2-1)$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție

$$\text{Demonstrație: } \left. \begin{matrix} d' \mid a \\ d' \mid b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d' \mid a+b \\ d' \mid ab \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d' \mid ab+1 \\ d' \mid ab \end{matrix} \right\} \Rightarrow d' \mid 1 \Rightarrow (a, b) = 1; \quad \left. \begin{matrix} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \\ (a, b) = 1 \\ d \text{ impar} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a-b, a+b) = 1 \quad (1); \quad \left. \begin{matrix} a+b \mid (a+b)b \\ a+b \mid ab+1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a+b \mid (a+b)b - (ab+1) \Rightarrow a+b \mid b^2-1 \quad (2);$$

$$\left. \begin{matrix} a-b \mid ab-1 \\ a-b \mid (a-b)b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a-b \mid (ab-1) - b(a-b) \Rightarrow a-b \mid b^2-1 \quad (3); \text{ din } (1), (2) \text{ și } (3) \Rightarrow a^2 - b^2 \mid b^2-1 \text{ și}$$

$$b^2-1 \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 \leq b^2-1 \Leftrightarrow a^2+1 \leq 2b^2 \quad (4); \quad a^2+1 \text{ impar, } 2b^2 \text{ par si } (4) \Rightarrow a^2+2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 2(b^2-1).$$

P4. Fie $ABCD$ un paralelogram care are măsura unghiului A egală cu 60° . Dacă bisectoarea unghiului B intersectează diagonala AC în punctul M și latura DC în punctul N , bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în punctul P și latura AB în punctul Q iar patrulaterul $BNDQ$ este romb arătați că $AC = 3MP$.

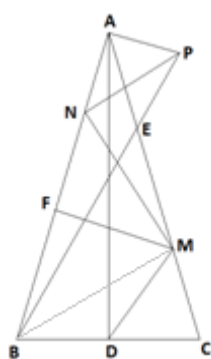
Aurelia Cațaros, Călărași

Indicație: M este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$ și P este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABD$

P5. Fie triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ și $m(\angle ACB) = 75^\circ$. În interiorul unghiului ABC se consideră semidreptele $[BE]$ și $[BM]$ astfel încât $m(\angle ABE) = 15^\circ$ și $m(\angle MBC) = 30^\circ$, $E, M \in (AC)$. Perpendiculara în M pe BM intersectează AB în N . Dacă D este mijlocul laturii $[BC]$ și P este piciorul perpendicularei din A pe BE , demonstrați că $MD = NP$.

Sorin Furtună, Călărași

Soluție



$m(\angle ABM) = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle BMN$ - dreptunghic și isoscel. Ducem

$$MF \perp BN, F \in (BN) \Rightarrow MF = \frac{BN}{2}$$

$$m(\angle BAC) = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ \Rightarrow MF = \frac{AM}{2} \text{ din } \triangle \text{ dreptunghic } AFM. \text{ Deci}$$

$$BN = AM \Rightarrow AN = MC \quad (1)$$

$$m(\angle BEC) = 45^\circ \Rightarrow m(\angle AEP) = m(\angle EAP) = 45^\circ$$

$$\triangle ABD \equiv \triangle BAP (IU) \Rightarrow BD = AP \Rightarrow DC = AP \quad (2)$$

$$m(\angle NAP) = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \Rightarrow m(\angle NAP) = m(\angle MCD) \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \triangle NAP \equiv \triangle MCD \Rightarrow MD = NP$

P6. Fie ABC un triunghi, d_1 simetrica dreptei BC față de dreapta BA și d_2 simetrica dreptei CB față de dreapta CA . O dreaptă care trece prin punctul A și nu intersectează segmentul $[BC]$, intersectează dreapta d_1 în punctul M și dreapta d_2 în punctul N . Să se arate că $BM + CN = BC$ dacă și numai dacă $m(\angle BAC) = 90^\circ$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. " $\Leftarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} = 90^\circ$ simetricul lui M față de AB este un punct $M' \in BC$ astfel ca $BM = BM'$.

Pe de altă parte $\widehat{MAB} = \widehat{BAM'}$, $\widehat{M'AC} = 90^\circ - \widehat{BAM'}$ și

$$\widehat{MAC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{MAB} = 90^\circ - \widehat{MAB},$$

astfel că $\widehat{NAC} = \widehat{M'AC}$ și $\triangle ACN \equiv \triangle ACM'$, deci $CM' = CN$.

În concluzie $BM + CN = BM' + CM' = BC$.

" $\Rightarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$ atunci $\widehat{M'AC} \neq \widehat{NAC}$ și dacă $\widehat{M'AC} < \widehat{MAC}$ atunci $M'C < NC$ și $MB + NC > BC$ dacă $\widehat{M'AC} > \widehat{NAC}$ atunci $M'C > NC$ și $MB + NC < BC$.



CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VIII-a

P1. Dacă M este mulțimea numerelor naturale n cu proprietatea că $2\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ este număr natural, atunci arată că toate elementele mulțimii M sunt divizibile cu 3.

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: Fie $n \in M \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, astfel încât $2\sqrt{2+\sqrt{4+n}} = k$, $(*) \Leftrightarrow 16(n+k^2) = k^4 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$, astfel încât $k = 2m \Rightarrow (*) \Leftrightarrow n = m(m-2)m(m+2) \Rightarrow 3|m$.

P2. Există numere x care nu sunt întregi, cu proprietatea: $x + \frac{2015}{x} = [x] + \frac{2015}{[x]}$? (justifică răspunsul)

(cu $[x]$ este notat cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real x)

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: $x + \frac{2015}{x} = [x] + \frac{2015}{[x]} \Leftrightarrow x[x] = 2015 \Leftrightarrow x = -\frac{403}{9} \in (-45, -44)$

P3. Găsește toate numerele reale $x \in (0, \infty)$ cu proprietatea: $\frac{x^2+4}{x} + \frac{x^2+8}{x+1} + \frac{x^2+12}{x+2} + \dots + \frac{x^2+2016}{x+503} = 2016$.

Adriana Olaru, Călărași

Soluție: I) presupunem $x = 2 \Rightarrow \frac{2^2+4}{2} + \frac{2^2+8}{2+1} + \frac{2^2+12}{2+2} + \dots + \frac{2^2+2016}{2+503} = 2016$;

II) presupunem $x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^2+4k+4}{x+k} > 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0, \forall x \in (0, \infty), k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2+4}{x} + \frac{x^2+8}{x+1} + \frac{x^2+12}{x+2} + \dots + \frac{x^2+2016}{x+503} > 2016$.

P4. În cele 5 vârfuri și în cele 5 mijloace de laturi ale unui pentagon convex sunt scrise numerele de 1 la 10 astfel ca pentru orice latură suma numerelor din capetele ei și a numărului din mijloc să fie aceeași: S . Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua S .

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Fie V suma numerelor din vârfuri și M suma numerelor din mijloacele laturilor. Avem:

$$V + M = 1 + 2 + \dots + 10 = 55. \quad (1)$$

Pe de altă parte dacă notăm cu L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 suma numerelor de pe laturi, avem:

$$2V + M = 5S \quad (2)$$

(fiecare vârf se adună de două ori).

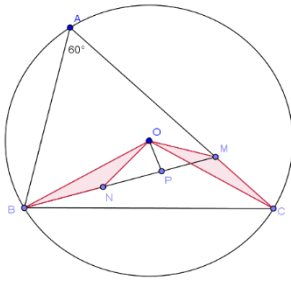
Din relația (2) rezultă că suma este maximă când V este maxim și suma este minimă când V este minim.

$$V_{\min} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad M = 40 \quad \text{și} \quad S_{\min} = 14$$

$$V_{\max} = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40, \quad M = 15 \quad \text{și} \quad S_{\max} = 19.$$

Repartițiile numerelor sunt: Pentru $S_{\min}$ în vârfuri 1, 3, 5, 2, 4 pe laturi 10, 6, 7, 8, 9. Pentru $S_{\max}$ în vârfuri 10, 8, 6, 9, 7 și pe laturi 1, 5, 4, 3, 2.

P5. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Dacă $m(\angle A) = 60^\circ$, $AB < AC$, $M \in (AC)$, $MB = AB$ și O aparține interiorului triunghiului ABM , atunci arată că:



a) patrulaterul $OBCM$ este inscriptibil;

b) $OM = \frac{\sqrt{3}}{3}(2AB - AC)$.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție:

În $\triangle ABM$, $m(\angle A) = 60^\circ$, $AB = BM \Rightarrow \triangle ABM$ echilateral $\Rightarrow m(\angle BMA) = 60^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow m(\angle BMC) &= 120^\circ \\ m(\angle BOC) &= 2m(\angle A) = 120^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle BMC \equiv \angle BOC \Rightarrow OBCM \text{ inscriptibil} \Rightarrow \angle OBM \equiv \angle OCM$$

Construim $BN = MC$, $N \in BM$

$$\xrightarrow{L.U.L} \triangle OBN \equiv \triangle OCM \Rightarrow [ON] \equiv [OM], \angle BON \equiv \angle COM$$

$$\Rightarrow m(\angle BOC) = m(\angle MON) = 120^\circ$$

$$\triangle NOM \text{ isoscel} \Rightarrow m(\angle OMN) = 30^\circ$$

$$\text{În } \triangle OPM \left(m(\angle OPM) = 90^\circ \right) \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}MN}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BM - BN}{2OM}$$

$$\Rightarrow \frac{AM - MC}{OM} = \sqrt{3} \Leftrightarrow OM = \frac{\sqrt{3}}{3}(2AB - AC).$$

P6. Fie M un punct interior triunghiului ABC și $MC \cap AB = \{C'\}$, $MB \cap AC = \{B'\}$. Notăm cu S_1 , S_2 , S_3 ariile triunghiurilor $C'MB$, $B'MC$, BMC .

a) Să se arate că $S_3^2 > S_1 \cdot S_2$.

b) Să se determine în funcție de S_1 , S_2 , S_3 aria patrulaterului $AC'MB'$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. a) Avem

$$\begin{aligned} S_3^2 > S_1 \cdot S_2 &\Leftrightarrow \frac{S_3}{S_1} > \frac{S_2}{S_3} \Leftrightarrow \frac{MC}{MC'} > \frac{MB'}{MB} \Leftrightarrow \\ MC \cdot MB &> MC' \cdot MB' \Leftrightarrow \mathcal{A}(BMC) > \mathcal{A}(B'MC') \Leftrightarrow \\ \mathcal{A}(BMC) + \mathcal{A}(BMC') &> \mathcal{A}(B'MC') + \mathcal{A}(BMC') \Leftrightarrow \\ \mathcal{A}(BC'C) &> \mathcal{A}(BC'B') \Leftrightarrow \\ d(C, AB) &> d(B', AB) \Leftrightarrow CA > B'A \text{ (relație adevărată)}. \end{aligned}$$

b) Împărțim patrulaterul în două triunghiuri: $\triangle AMC'$ de arie x_1 și $\triangle AMB'$ de arie x_2 . Avem:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{S_1} &= \frac{x_1 + x_2 + S_2}{S_1 + S_3}, \quad \frac{x_2}{S_2} = \frac{x_1 + x_2 + S_1}{S_2 + S_3} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x_1 \cdot S_3 - x_2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2 \\ x_1 \cdot S_2 - x_2 \cdot S_3 = -S_1 \cdot S_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{S_1 S_2 (S_1 + S_3)}{S_3^2 - S_1 S_2} \\ x_2 = \frac{S_1 S_2 (S_2 + S_3)}{S_3^2 - S_1 S_2} \end{cases} \Rightarrow \\ \mathcal{A}(AC'MB') = x_1 + x_2 &= \frac{S_1 S_2 (S_1 + S_2 + 2S_3)}{S_3^2 - S_1 S_2} \end{aligned}$$