Stelele Matematicii 2019, Juniori – Enunţuri

Problema 1. Determinaţi numerele naturale care au următoarea proprietate: pentru orice divizor pozitiv d al lui n, $d+1$ este un divizor al lui $n+1$.

Problema 2. Fie A şi C două puncte pe un cerc $\mathscr{C}$ astfel încât (AC) să nu fie diametru şi fie P un punct al segmentului (AC) diferit de mijlocul acestuia. Cercurile c_1 şi c_2, tangente interior în A, respectiv C la cercul $\mathscr{C}$ trec prin punctul P şi se intersectează a doua oară în punctul Q. Dreapta PQ intersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctele B şi D. Cercul c_1 intersectează segmentele (AB) şi (AD) în K, respectiv N, iar cercul c_2 intersectează segmentele (CB) şi (CD) în L, respectiv M. Demonstraţi că:
a) patrulaterul $KLMN$ este trapez isoscel;
b) Q este mijlocul segmentului (BD).

Problema 3. Pe tablă sunt scrise iniţial trei numere naturale consecutive, $n-1$, n, $n+1$. La o mutare, se aleg două dintre ele, a şi b, şi se înlocuiesc cu $2a-b$ şi $2b-a$. Pentru ce valori ale lui n este posibil ca, după o succesiune de asemenea mutări, două dintre numerele de pe tablă să fie egale cu 0?

Problema 4. Arătaţi că dacă numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au produsul 1, atunci

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Stelele Matematicii 2019, Juniori – Soluţii

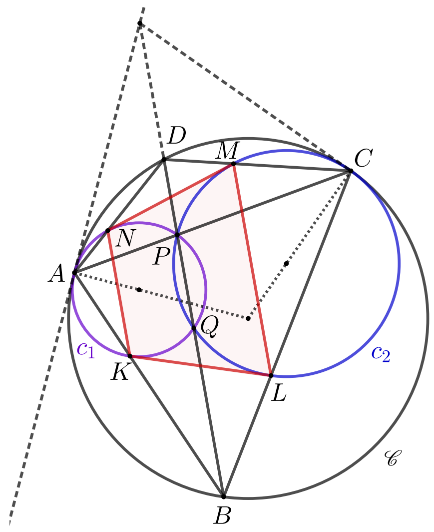
Problema 1. Determinaţi numerele naturale care au următoarea proprietate: pentru orice divizor pozitiv d al lui n, $d+1$ este un divizor al lui $n+1$.

Soluţie:
Demonstrăm că numerele căutate sunt 1 şi numerele prime impare. Este evident că aceste numere satisfac proprietatea dorită şi că 2 nu o satisface.
Reciproc, să presupunem că n este compus şi că $n = ab$ cu $1 < a \leq b < n$. Atunci $b+1$ divide $n+1$, adică există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $c(b+1) = n+1 = ab+1$. Rezultă că b divide $c-1$. Este clar că $c > 1$. Deducem că $c-1 \geq b$, adică $c \geq b+1$. Atunci $ab+1 = c(b+1) \geq (b+1)^2$, adică $ab+1 \geq b^2+2b+1$, de unde $a \geq b+2$, ceea ce contrazice $a \leq b$.
Aşadar, niciun număr compus nu are proprietatea din enunţ.

Problema 2. Fie A şi C două puncte pe un cerc $\mathscr{C}$ astfel încât (AC) să nu fie diametru şi fie P un punct al segmentului (AC) diferit de mijlocul acestuia. Cercurile c_1 şi c_2, tangente interior în A, respectiv C la cercul $\mathscr{C}$ trec prin punctul P şi se intersectează a doua oară în punctul Q. Dreapta PQ intersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctele B şi D. Cercul c_1 intersectează segmentele (AB) şi (AD) în K, respectiv N, iar cercul c_2 intersectează segmentele (CB) şi (CD) în L, respectiv M. Demonstraţi că:
a) patrulaterul $KLMN$ este trapez isoscel;
b) Q este mijlocul segmentului (BD).

Thanos Kalogerakis

Soluţia 1: a) Punctul B se află pe axa radicală, BD, a cercurilor c_1 şi c_2, deci $BK \cdot BA = BL \cdot BC$, prin urmare patrulaterul $AKLC$ este inscriptibil. La fel şi $ACMN$. Deducem că $\angle LKB \equiv \angle ACB$. Unghiul făcut de tangenta în A la cercul c_1 (care este tangentă şi cercului $\mathscr{C}$) cu dreapta AB subîntinde arcul AK în cercul c_1 şi AB în cercul $\mathscr{C}$, de unde deducem că $\angle ANK \equiv \angle ADB$. Deci $NK \parallel BD$ şi, analog, $MN \parallel BD$. (Acest lucru se putea vedea şi din omotetiile care duc cercul c_1, respectiv c_2, în cercul $\mathscr{C}$.) În fine, $m(\angle NKL) = 180° - m(\angle AKN) - m(\angle LKB) = 180° - m(\angle ABD) - m(\angle LKB) = 180° - m(\angle ACD) - m(\angle ACB) = m(\angle BAD)$. Analog, $m(\angle MNK) = m(\angle BAD)$, de unde rezultă concluzia. Alternativ, se putea observa că segmentele $[ML]$, $[PQ]$ şi $[NK]$ au aceeaşi mediatoare.
b) Axele radicale a câte două din cercurile c_1, c_2, $\mathscr{C}$, adică tangenta la $\mathscr{C}$ în A, tangenta la $\mathscr{C}$ în C şi dreapta BD nu sunt toate paralele, deci sunt concurente în centrul radical. Atunci diagonala BD este simediană în triunghiul ABC, deci patrulaterul $ABCD$ este armonic. (Se poate folosi acest fapt şi pentru a da o altă rezolvare punctului a).)
Cum $NPQK$ este trapez isoscel, deducem că $\angle NAP \equiv \sphericalangle QAK$, deci semidreptele $(AP$ şi $(AQ$ sunt izogonale în unghiul $\angle DAB$. Dar $ABCD$ fiind patrulater armonic, (AP) este simediană în triunghiul DAB, deci izogonala ei, (AQ), este mediană.



Altă idee:
Putem folosi o proprietate a patrulaterelor armonice reliefată cu ocazia concursului Danube Mathematical Competition din acest an:
Dacă R este mijlocul diagonalei (BD) a patrulaterului armonic $ABCD$, atunci $\angle ARD \equiv \angle CRD$.
Arătăm că R este unicul punct de pe (BD) cu proprietatea de mai sus. Apoi se arată că punctul Q are proprietatea dorită, deci este mijlocul diagonalei (BD).

Problema 3. Pe tablă sunt scrise iniţial trei numere naturale consecutive, $n-1$, n, $n+1$. La o mutare, se aleg două dintre ele, a şi b, şi se înlocuiesc cu $2a-b$ şi $2b-a$. Pentru ce valori ale lui n este posibil ca, după o succesiune de asemenea mutări, două dintre numerele de pe tablă să fie egale cu 0?

Andrei Eckstein

Soluţia 1: (*Alexandru Mihalcu*)
Vom demonstra că se poate ajunge la a avea două 0-uri pe tablă dacă şi numai dacă n este o putere a lui 3.
Cum suma numerelor de pe tablă este constantă, trebuie să obţinem pe tablă numerele $(0,0,3n)$. Dacă $p \neq 3$ este un divizor prim al lui n, la final, toate numerele sunt divizibile cu p. Atunci $p \mid 2a-b$, $p \mid 2b-a$ implică $p \mid \big(2(2a-b)+(2b-a)\big)$, adică $p \mid 3a$. Cum $(p,3)=1$, rezultă $p \mid a$ şi apoi $p \mid b$. Aşadar, dacă la final toate numerele au fost divizibile cu un $p \neq 3$, atunci ele au fost mereu divizibile cu p. Ori $(n-1,n,n+1)=1$, prin urmare nu se poate ajunge la două 0-uri pe tablă dacă n are şi divizori primi $p \neq 3$.
Rămâne cazul în care $n=3^k$, cu $k \in \mathbb{N}$. Alegând la prima mutare $a=n-1$, $b=n+1$, ajungem să avem pe tablă numerele $n-3, n, n+3$, toate divizibile cu 3. Ele se pot scrie ca $3(m-1), 3m, 3(m+1)$ şi operaţiile în continuare se desfăşoară de parcă pe tablă ar fi numerele $m-1, m, m+1$. (După $j \leq k$ mutări vom avea pe tablă numerele 3^k-3^j, 3^k, 3^k+3^j. După pasul k avem, deci, 0, 3^k, $2\cdot 3^k$. Alegând

$a = 3^k$ şi $b = 2 \cdot 3^k$ ajungem să avem pe tablă $0, 0, 3^{k+1}$.

Soluţia 2: (*Andrei Eckstein*)
Să spunem că tripletul (a, b, c) este rezolvabil dacă având pe tablă numerele a, b, c putem să obţinem, după o succesiune de mutări, ca două dintre numerele de pe tablă să fie egale cu 0.
Atunci (a, b, c) este rezolvabil dacă şi numai dacă (ta, tb, tc), $t \in \mathbb{N}^*$, este rezolvabil (se efectuează aceleaşi mutări, se schimbă numai „unitatea de măsură"). (*)
Vom demonstra că tripletul $(n-1, n, n+1)$ este rezolvabil dacă şi numai dacă n este o putere a lui 3.
Să arătăm pentru început că dacă $n = 3^m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci tripletul $(n-1, n, n+1)$ este rezolvabil. Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după $m \geq 0$.
Pentru $m = 0$: tripletul $(0, 1, 2)$ se rezolvă printr-o singură mutare alegând $a = 1$, $b = 2$.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru m, să o demonstrăm pentru $m+1$. Având pe tablă tripletul $(3^{m+1}-1, 3^{m+1}, 3^{m+1}+1)$, alegem $a = 3^{m+1}-1$ şi $b = 3^{m+1}+1$ şi ajungem la tripletul $(3^{m+1}-3, 3^{m+1}, 3^{m+1}+3)$. Conform observaţiei (*), acest triplet este rezolvabil deoarece, potrivit ipotezei de inducţie, tripletul $(3^m-1, 3^m, 3^m+1)$ este rezolvabil.
Să observăm că suma numerelor de pe tablă nu se schimbă la efectuarea unei mutări. Ea rămâne mereu $3n$, adică multiplu de 3. După prima mutare numerele devin egale mod 3 căci $2a - b \equiv -a - b \equiv 2b - a \pmod 3$. Dacă după prima mutare ele au devenit congruente cu 1 sau 2 mod 3, ele vor rămâne aşa, deci nu vor putea deveni 0. Aşadar, obligatoriu, prima mutare trebuie să facă numerele de pe tablă multipli de 3. De asemenea, dacă (a, b, c) e rezolvabil, adică poate fi transformat în $(0, 0, a+b+c)$ printr-o succesiune de mutări, atunci înaintea ultimei mutări pe tablă se aflau numerele 0, $\dfrac{a+b+c}{3}$ şi $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$, deci în mod obligatoriu $3 \mid a+b+c$.
Dacă $n = 3k+1$ atunci prima mutare trebuie să fie $(3k, 3k+1, 3k+2) \mapsto (3k, 3k, 3k+3)$. Dacă $k = 0$, am terminat ($n = 1$ este putere a lui 3), iar dacă nu, atunci acest triplet este rezolvabil dacă şi numai dacă $(k, k, k+1)$ este rezolvabil. Ori acesta nu este rezolvabil deoarece $k + k + (k+1)$ nu este divizibil cu 3.
Dacă $n = 3k+2$ atunci prima mutare trebuie să fie $(3k+1, 3k+2, 3k+3) \mapsto (3k, 3k+3, 3k+3)$. Acest triplet este rezolvabil dacă şi numai dacă $(k, k+1, k+1)$ este rezolvabil. Ori acesta nu este rezolvabil deoarece $k + (k+1) + (k+1)$ nu este divizibil cu 3.
Dacă $n = 3k$ atunci prima mutare trebuie să fie $(3k-1, 3k, 3k+1) \mapsto (3k-3, 3k, 3k+3)$ care este rezolvabil dacă şi numai dacă $(k-1, k, k+1)$ este rezolvabil. Cum $n \neq 0$, există $u, v \in \mathbb{N}$ astfel ca $n = 3^u \cdot v$, $(v, 3) = 1$. Repetând acest raţionament, deducem că după u mutări se ajunge obligatoriu la tripletul $(v-1, v, v+1)$. Am văzut că unicul triplet de acest fel care este rezolvabil este $(0, 1, 2)$, deci este necesar ca n să fie putere a lui 3.

Problema 4. Arătaţi că dacă numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au produsul 1, atunci

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Andrei Eckstein

Soluţie: Vom demonstra că pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ are loc inegalitatea

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{\sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2}}.$$

Aceasta se obţine adunând inegalitatea de mai jos cu cele analoage obţinute prin permutarea ciclică a variabilelor:

$$(n-1) \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + (n-2) \cdot \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} \overset{medii}{\geq}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \right)^{\frac{2}{n}} = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{a_1^n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Egalitate avem dacă toate numerele sunt egale cu 1.

Remarcă: Pentru $n = 3$ inegalitatea a fost publicată de Šefket Arslanagić în Elemente der Mathematik; pentru $n = 4$ ea apare într-o variantă mai slabă în Mathscope, pb 321.1 (autor Lê Thanh Hâi)).
Observaţii:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{k} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{k} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{k} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{k} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

unde $k = \dfrac{n-1}{2}$ – asta e chiar problema de mai sus scrisă pentru $a_j := \sqrt{a_j}$, însă se poate înlocui $k = \dfrac{n-1}{2}$ cu $k \geq \dfrac{n-1}{2}$. De exemplu, în pb 321.1 e dată pentru $n = 3$, $k = 1$ (care oricum e cunoscută; e şi în Excalibur vol. 5, nr. 4/2000) şi pentru $n = 4$, $k = 2$. De slăbit se poate slăbi cu rearanjamente; iar pentru $k \in \mathbb{N}$ se poate completa cu 1-uri la aplicarea inegalităţii mediilor.

Rezultate Stelele Matematicii 2019
Juniori

	Nume si Prenume	Clasa	Scoala	Oras	Subiect 1	Subiect 2	Subiect 3	Subiect 4	Total	Premiul	Medalie
1	Anghel David Andrei	a VIII-a	Școala Gimnazială nr. 56	București	7	7	7	7	28	I	AUR
2	Popa Diana Alexandra	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	3	0	17	II	ARGINT
3	Vasile Octavian	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	6,5	7	3	0	16,5	III	ARGINT
4	Stan Ionut Gabriel	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	5	4	0	16	M	ARGINT
5	Pirvulescu Gabriela Madalina		Scoala Gimnaziala Gheorghe Titeica	Craiova	6,50	7	1	0	14,5	M	BRONZ
6	Mihuț Maria-Emilia	a VIII-a	Colegiul National "Emil Racoviță"	Iași	7	4	3	0	14	M	BRONZ
7	Dima Stefan	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	0	7	0	14	M	BRONZ
8	Chiriță Andrei Giovani	a VIII-a	Liceul greco-catolic Timotei Cipariu	București	6,5	7	0	0	13,5	M	BRONZ
9	Spataru Vlad Titus	a VIII-a	Complex Educatinal Laude-Reut	București	6,5	5	1	0	12,5		BRONZ
10	Ardelean Alexandru Petru	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	2	3	0	12		BRONZ
11	Cadîr Selim	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	5	0	0	12		BRONZ
12	Ipate Elisa	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	3	2	0	12		BRONZ
13	Monea Dragoș Gabriel	a IX-a	Colegiul Național "Decebal"	Deva	1	7	3	0	11		BRONZ
14	Dragu Alexandra	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	3	0	0	10		BRONZ
15	Cernatinschi Dan	a VIII-a	Liceul Teoretic Orizont	Chișinău	6,5	0	3	0	9,5		BRONZ
16	Vulturu Darius	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	1	0	0	8		
17	Nodea Adrian	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	6,5	1	0	0	7,5		
18	Andrei Luca Mihai	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	0	0	0	7		
19	Vlas Arsenie	a VIII-a	Liceul Teoretic Orizont	Chișinău	1	4	0	0	5		
20	Velicu Alexandru Ștefan	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	1	3	0	5		
21	Morosan Mihnea Sasha	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	4,5	0	0	0	4,5		
22	Balaur Francesca	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	2	1	1	0	4		
23	Melega Teodor	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	4	0	0	0	4		
24	Marinescu Rares Theodor	a VIII-a	Școala Gimnazială "Mihai Eminescu"	Rosiori de Vede	3	0	0	0	3		
25	Popescu Tudor Dan	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	0	1	0	2		
26	Botezat Catalin	a IX-a	Liceul Teoretic Orizont	Chișinău	0	1	0	0	1		
27	Mirica Ioan Alexandru	a VIII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0	1	0	0	1		
28	Ilie Luca Mihai	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0,5	0	0	0	0,5		
29	Fares Yusuf	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0,5	0	0	0	0,5		
30	Nicu Alexandru	a VII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0	0	0	0	0		

Stelele Matematicii 2019 — Seniori

Problema 1. Fie m un număr natural nenul şi fie $n = m^2 + 1$. Determinaţi numerele reale x_1, x_2, $\dots$, x_n, care îndeplinesc condiţia

$$x_i = 1 + \frac{2mx_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problema 2. Fie n un număr întreg, $n \geq 3$, şi fie a_1, a_2, $\dots$, a_n numere întregi nenule, astfel încât numărul

$$a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right)$$

să fie întreg. Rezultă că produsul $a_1 a_2 \cdots a_n$ este divizibil cu fiecare a_i^2 ?

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Fie M un punct variabil în interiorul laturii AB şi fie γ_B cercul prin M, tangent în B laturii BC. Fie P şi Q punctele de contact ale lui γ_B cu tangentele sale din A şi fie X mijlocul segmentului PQ. Analog, fie N un punct variabil în interiorul laturii AC şi fie γ_C cercul prin N, tangent în C laturii BC. Fie R şi S punctele de contact ale lui γ_C cu tangentele sale din A şi fie Y mijlocul segmentului RS. Arătaţi că dreapta determinată de centrele cercurilor AMN şi AXY trece printr-un punct fix.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Un tablou triunghiular $(a_{i,j})$, format din zerouri şi unităţi, unde i şi j sunt numere naturale nenule, astfel încât $i + j \leq n + 1$, se numeşte *n-triunghi binar anti-Pascal*, dacă $a_{i,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j} \equiv 1 \pmod 2$, pentru toate valorile posibile i şi j. Determinaţi numărul minim de unităţi pe care le poate conţine un n-triunghi binar anti-Pascal.

Stars of Mahtematics, 2019, Senior Grade — Solutions

Problem 1. Let m be a positive integer and let $n = m^2 + 1$. Determine all real numbers x_1, x_2, …, x_n satisfying

$$x_i = 1 + \frac{2mx_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Solution. The x_i are either all equal to $1+2m/n = (m+1)^2/(m^2+1)$ or exactly one is equal to $m + 1$ and the other are all equal to $1 + 1/m$. The verification offers no difficulty and is hence omitted.

Leaving aside the trivial case where the x_i are all equal, consider a solution x_1, x_2, …, x_n whose entries are not all equal. Let $s = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ and notice that each x_i is a root of the quadratic polynomial $2mX^2 - sX + s$. Since the x_i are not all equal, and each x_i is positive (in fact, at least 1), the roots u and v of this quadratic polynomial are distinct positive real numbers satisfying $2muv = s$.

Let k be the number of indices i such that $x_i = u$, so $x_i = v$ for the remaining $n - k$ indices. We may and will assume that $k \geq n/2$; and since the x_i are not all equal, $k \leq n - 1 = m^2$.

Write $2muv = s = ku^2 + (n - k)v^2 \geq 2uv\sqrt{k(n-k)}$, so $k(n - k) \leq m^2$, and recall that $k \geq n/2$, to infer that $k \geq \frac{1}{2}(n + \sqrt{n^2 - 4m^2}) = m^2$. Further, the condition $k \leq m^2$ forces $k = m^2$ which in turn forces $v = mu$, by the preceding.

Finally, since the x_i add up to $n+2m = (m+1)^2$, it follows that $u = 1+1/m$ and $v = m+1$, and the solution has the form stated in the first paragraph.

Problem 2. If n is an integer, $n \geq 3$, and a_1, a_2, …, a_n are non-zero integers such that

$$a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right)$$

is an integer, does it follow that the product $a_1 a_2 \cdots a_n$ is divisible by each a_i^2?

Solution. The answer is in the affirmative. To prove this, begin by noticing that the rational numbers $b_i = a_1 a_2 \cdots a_n / a_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, are the roots of the degree n monic polynomial $f = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n$, where

$$s_k = \textstyle\sum_{|I|=k} \prod_{i \in I} b_i = \sum_{|I|=k} \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^{k-2} \left(\prod_{i \notin I} a_i \right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Clearly, s_2, …, s_n are all integral. Since s_1 is integral, by hypothesis, and f is monic, it follows that the b_i are all integral. (A rational root of a monic polynomial with integral coefficients is necessarily integral.)

Problem 3. Let ABC be a triangle. Let M be a variable point interior to the segment AB, and let γ_B be the circle through M and tangent at B to BC. Let P and Q be the touch points of γ_B and its tangents from A, and let X be the midpoint of the segment PQ. Similarly, let N be a variable point interior to the segment AC, and let γ_C be the circle through N and tangent at C to BC. Let R and S be the touch points of γ_C and its tangents from A, and let Y be the midpoint of the segment RS. Prove that the line through the centres of the circles AMN and AXY passes through a fixed point.

Flavian Georgescu

Solution. We show that the line through the centres of the circles AMN and AXY passes through the centre of the circle ABC. Alternatively, but equivalently, we prove that the three circles share a point different from A.

Invert the whole configuration from A and let Z' denote the image of Z under inversion: The circles ABC, AMN and AXY are transformed into the lines $B'C'$, $M'N'$ and $X'Y'$, respectively; the line BC is transformed into the circle γ through A, B' and C'; the circle γ_B is transformed into a circle γ'_B through B' and M', centred at X' and externally tangent to γ at B'; and the circle γ_C is transformed into a circle γ'_C through C' and N', centred at Y' and externally tangent to γ at C'. In this setting, we are to prove that the lines $B'C'$, $M'N'$ and $X'Y'$ are (projectively) concurrent.

To this end, let the pair of external common tangents of γ'_B and γ'_C meet at O, and let θ be the homothety centred at O mapping γ'_B onto γ'_C; clearly, O lies on the line $X'Y'$ through the centres of the two circles. Let further θ_B and θ_C be the homotheties centred at B' and C', respectively, mapping γ onto γ'_B and γ'_C, respectively.

The centres of the three homotheties are collinear, so the line $B'C'$ passes through O.

Finally, $\theta = \theta_C\theta_B^{-1}$, so $\theta M' = \theta_C\theta_B^{-1}M' = \theta_C A = N'$, showing that the line $M'N'$ passes through O as well. This ends the proof.

Problem 4. Given a positive integer n, a triangular array $(a_{i,j})$ of zeroes and ones, where i and j run through the positive integers such that $i + j \leq n + 1$, is called a *binary anti-Pascal n-triangle* if $a_{i,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j} \equiv 1 \pmod 2$ for all possible values i and j may take on. Determine the minimum number of ones a binary anti-Pascal n-triangle may contain.

Alexandru Mihalcu

Solution. The required minimum is $\lfloor n(n + 1)/6 \rfloor$; with the convention that rows decrease in length upwards, this minimum is achieved if, for instance, the bottom row consists of $\lfloor n/3 \rfloor$ disjoint blocks of the form $0\,0\,1$, followed by an all-zero possible tail. (A binary anti-Pascal triangle is clearly determined by the bottom row.)

In what follows, part of the generic configurations referred to may not exist for the first few values of n; in this case, simply consider the corresponding induced configuration, that is, the trace the generic configuration leaves on the configuration at hand. Also, recall the convention that rows decrease in length upwards (hence columns decrease in height rightwards).

We now show by induction on n that a binary anti-Pascal n-triangle contains at least $\lfloor n(n+1)/6 \rfloor$ ones, of which at least $n-1$ lie on the bottom three rows (and since the transpose of a binary anti-Pascal triangle is again one such, the same holds for the leftmost three columns).

The cases $n = 1, 2, 3$ are easily dealt with, so let $n \geq 4$, and let A be a binary anti-Pascal n-triangle. The lower left 3×3 subarray A' (induced if $n = 4$) contains at least 3 ones, unless the lower left and central entries are both one and the other entries are all zero, in which case there are only 2 ones in A'.

In the former case, consider the binary anti-Pascal $(n - 3)$-triangle consisting of the rightmost $n - 3$ columns of A. By the induction hypothesis, the bottom three rows of this triangle contain at least $n - 4$ ones, so the bottom three rows of A contain at least $3 + (n - 4) = n - 1$ ones.

In the latter case, the statement clearly holds if $n = 4$, so let $n \geq 5$ and notice that the bottom two entries of the column of A adjoining A' along the right flank are both one. Thus, the 3×4 subarray of A extending A' rightwards contains at least 4 ones. The rightmost $n - 4$ columns of A form a binary anti-Pascal $(n - 4)$-triangle whose bottom three rows contain at least $n-5$ ones, by the induction hypothesis. Hence the bottom three rows of A contain at least $4+(n-5)=n-1$ ones.

In either case, the bottom three rows of A contain at least $n-1$ ones. Finally, by the induction hypothesis, the binary anti-Pascal $(n-3)$-triangle atop the bottom three rows of A contains at least $\lfloor (n-3)(n-2)/6 \rfloor$ ones, so A contains at least $n-1+\lfloor (n-3)(n-2)/6 \rfloor = \lfloor n(n+1)/6 \rfloor$ ones. This completes the induction and concludes the proof.

Remarks. The minimum is also achieved if the bottom row consists of $\lfloor n/3 \rfloor$ disjoint blocks of the form $0\,1\,0$, followed by a possible tail consisting of a single zero if $n \equiv 1 \pmod 3$, and of $0\,1$ if $n \equiv 2 \pmod 3$.

If $n \not\equiv 1 \pmod 3$, the minimum is again achieved if the bottom row consists of $\lfloor n/3 \rfloor$ disjoint blocks of the form $1\,0\,0$, followed by a possible tail of the form $1\,0$. If $n \equiv 1 \pmod 3$, and the bottom row consists of $\lfloor n/3 \rfloor$ disjoint blocks of the form $1\,0\,0$, followed by 1, then the outcome is of exactly $\lfloor n(n+1)/6 \rfloor + 1$ ones; and if the tail is 0, the outcome is of exactly $\lfloor n(n+1)/6 \rfloor + (n-1)/3$ ones.

Rezultate Stelele Matematicii 2019
Seniori

	Nume si Prenume	Clasa	Scoala	Oras	Subiect 1	Subiect 2	Subiect 3	Subiect 4	Total	Premiul	Medalie
1	Edis Memiș	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	Constanța	7	7	7	7	28	I	AUR
2	Parfeni Andrei Alexandru	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	7	4	25	II	AUR
3	Iacob Radu-Alexandru	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	7	7	7	24	III	AUR
4	Moldovan Andrei	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	6	7	7	2	22	M	ARGINT
5	Vergelea Vlad-Stefan	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	Constanța	7	7	7	1	22	M	ARGINT
6	Andrei Marginean	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	7	0	21	M	ARGINT
7	Tran Bach Nguyen	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	7	0	21	M	ARGINT
8	Dragomirescu Robert	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	7	7	3	20	M	ARGINT
9	Robu Vlad	a XII-a	Colegiul National "Vasile Lucaciu"	Baia Mare	2	7	7	0	16		BRONZ
10	Gheorghe Luca	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	0	0	14		BRONZ
11	Lecoiu Radu-Andrei	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	0	0	14		BRONZ
12	Girban Alexandru	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	Constanța	7	7	0	0	14		BRONZ
13	Pantea Andrei	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	0	0	14		BRONZ
14	Chirita Denis	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	0	0	14		BRONZ
15	Țolu Diana	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	7	0	0	14		BRONZ
16	Sfia Anca	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	6	7	0	0	13		BRONZ
17	Balan-Tribus Leon-Roland	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	7	0	2	12		BRONZ
18	Novac Sergiu-Ionut	a XII-a	Liceul Teoretic "C. Brediceanu"	Lugoj	5	7	0	0	12		BRONZ
19	Ignatescu Luca	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	7	1	0	11		BRONZ
20	Paisanu Tudor	a X-a	Liceul Teoretic National	București	3	7	1	0	11		BRONZ
21	Nicolcea Horia-Paul	a XII-a	Colegiul Național "Dimitrie Cantemir" Onești	Onești	3	7	0	0	10		BRONZ
22	Puscasu Razvan Stefan	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	Constanța	3	7	0	0	10		BRONZ
23	Constantinescu Iustinian Cristian	a IX-a	Colegiul Național de Informatica "Tudor Vianu"	București	3	7	0	0	10		BRONZ
24	Abu Shanab Amina	a XI-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	2	7	0	0	9		
25	Ion Andrei-Robert	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	1	0	7	9		
26	Picu George	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	7	1	0	9		
27	Dima Ileana	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	7	1	0	1	9		
28	Teodorescu Antonio	a XII-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	2	7	0	0	9		
29	Gasan Carol Luca	a X-a	Colegiul National "Sfantul Sava"	București	1	0	0	7	8		
30	Berbece Rian - Alexandru	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	4	0	1	0	5		
31	Bogdan Ana-Maria-Iulia	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	0	0	2	5		
32	Pitu Bianca	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	0	1	0	4		
33	Biteș Rareș	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	Constanța	3	0	0	0	3		
34	Budura Bogdan Giorgio	a XI-a	Colegiul National Emanuil Gojdu	Oradea	3	0	0	0	3		
35	Coman Mihnea-George	a X-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	3	0	0	0	3		
36	Alexandru Catinca	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	0	0	1	2		
37	Dragostin David	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	0	0	1	2		
38	Oțel Ioana Bianca	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	0	0	0	1		
39	Tololoi Ilinca-Roxana	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	1	0	0	0	1		
40	Buhnia Tudor	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0	0	0	0	0		
41	Voinea Ionuț-Florin	a IX-a	Liceul Teoretic Internațional de Informatica	București	0	0	0	0	0		