Stelele Matematicii 2017, Juniori — Soluţii

Problema 1. Câte dintre numerele naturale mai mici decât 2017 pot fi scrise în mod unic ca sumă a trei puteri naturale ale lui 2? (Două scrieri care diferă numai prin ordinea termenilor sunt considerate identice.)

Andrei Eckstein

Soluţie. Dacă un număr se scrie ca sumă de trei puteri naturale ale lui 2, nu neapărat distincte, grupând eventual termenii egali, obţinem o sumă de cel mult trei puteri *distincte* ale lui 2, deci reprezentarea în baza 2 a unui asemenea număr are cel mult trei cifre de 1. Convin numerele a căror reprezentare în baza 2 are trei cifre de 1, apoi numerele de forma $2^a + 1 = 2^{a-1} + 2^{a-1} + 1$ cu $a \in \mathbb{N}^*$ (numerele $2^a + 2^b$ cu $a > b \geq 1$ nu convin deoarece $2^a + 2^b = 2^{a-1} + 2^{a-1} + 2^b = 2^{b-1} + 2^{b-1} + 2^a$); în fine, convin numerele $2^c = 2^{c-1} + 2^{c-1} + 2^{c-2}$ dacă $c \geq 2$.

Numărăm mai întâi câte numere bune avem mai mici decât 2048. Aceste numere au cel mult 11 cifre în baza 2. Sunt $C_{11}^3 = 165$ mai mici decât 2048 care se scriu ca sumă de trei puteri distincte ale lui 2. Avem 10 numere de forma $2^a + 1$, $(1 \leq a \leq 10)$ şi 9 numere de forma 2^a, $(2 \leq a \leq 10)$, deci 184 de numere în total.

Numerele de la 2017 până la 2047 sunt mai mari decât $2^{10} + 2^9 + 2^8$, deci au mai mult de trei cifre de 1 în scrierea în baza 2, prin urmare niciunul dintre ele nu a fost numărat printre numerele bune. În concluzie, sunt 184 de numere bune mai mici ca 2017.

Problema 2. Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2(xy + yz + zx)$. Arătaţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq 3$ şi determinaţi cazurile de egalitate.

Vlad Robu

Soluţia 1. Folosind condiţia din enunţ, rescriem inegalitatea sub forma echivalentă

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq \sqrt{3(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2)}$$

sau, notând $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, $\sqrt{z} = c$, $(ab + bc + ca)^2 \geq 3(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)$, ceea ce revine la $3(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2bc + b^2ca + c^2ab) \geq 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Reamintim inegalitatea lui Schur: $a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$. Înmulţită cu 2, ea revine la

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2bc + b^2ca + c^2ab) \geq 2(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b).$$

Dar $2(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) = 2ab(a^2 + b^2) + 2bc(b^2 + c^2) + 2ca(c^2 + a^2) \geq 4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2$ şi $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Adunând ultimele trei inegalităţi obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Soluţia 2. Rescriem $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2(xy + yz + zx)$ sub forma

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 3.$$

Notând $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 2a$, $\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x} = 2b$, $\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2c$, condiţia din enunţ devine $abc(a + b + c) = 3/16$.

Întrucât numerele $a + b + c = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})/2$, $a + b = \sqrt{y}$, $b + c = \sqrt{z}$, $c + a = \sqrt{x}$, sunt strict pozitive, din condiţia de mai sus, rezultă că şi numerele a, b, c sunt strict pozitive.

Inegalitatea din enunţ devine $(a+b)(a+c)+(b+a)(b+c)+(c+a)(c+a) \geq 3$. Dar

$$\sum_{cyc}(a+b)(a+c) = \sum_{cyc} a^2 + 3\sum_{cyc} ab = 4\sum_{cyc} ab + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 4\sum_{cyc} ab, \tag{1}$$

iar

$$\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 = 3abc(a+b+c) + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2(b-c)^2 \geq 3abc(a+b+c) = \frac{9}{16}. \tag{2}$$

Întrucât a, b, c sunt strict pozitive, (2) implică $ab+bc+ca \geq 3/4$, care, împreună cu (1), implică inegalitatea cerută. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1/2$, i.e., $x = y = z = 1$.

Problema 3. Fie $P_1P_2\ldots P_n$ un poligon regulat cu n laturi. O broască aflată în vârful P_k $(1 \leq k \leq n)$ poate sări într-unul dintre vârfurile P_{k+2} sau P_{k-3}, indicii fiind reduşi modulo n. Determinaţi mulţimea numerelor naturale $n \geq 3$, care au următoarea proprietate: broasca poate face n sărituri, astfel încât să viziteze fiecare vârf al poligonului şi să se întoarcă în vârful din care a pornit.

ANDREI ECKSTEIN

Soluţie. Mulţimea cerută este formată din toate numerele naturale mai mari sau egale cu 3, care nu sunt divizibile cu 6, împreună cu toţi multiplii lui 5, inclusiv cei divizibili cu 6; adică, toate numerele naturale mai mari sau egale cu 3, care, împărţite la 30, nu dau restul 6, 12, 18, 24.

Dacă n este un număr cu proprietatea din enunţ şi a este numărul de sărituri de tipul $P_k \mapsto P_{k+2}$, iar b este numărul de sărituri de tipul $P_k \mapsto P_{k-3}$, atunci $a+b=n$ şi $n \mid 2a-3b$, de unde rezultă că $n \mid 5a$ şi $n \mid 5b$. Cum $0 \leq a, b \leq n$, trebuie să avem fie $a=0$, $b=n$, fie $b=0$, $a=n$, fie $5 \mid n$. Făcând numai sărituri de forma $P_k \mapsto P_{k+2}$ broasca va vizita toate vârfurile dacă şi numai dacă n este impar, iar făcând numai sărituri de forma $P_k \mapsto P_{k-3}$ ea va parcurge toate vârfurile dacă şi numai dacă $3 \nmid n$. În concluzie, dacă un număr este bun, atunci el fie nu se divide cu 2, fie nu se divide cu 3, fie se divide cu 5.

Reciproc, am văzut că, dacă $6 \nmid n$, atunci broasca poate parcurge toate vârurile facând sărituri de lungime egală.

În fine, dacă n este divizibil cu 5, broasca poate efectua următoarea succesiune de salturi: $P_k \mapsto P_{k+2}$, pentru fiecare indice k nedivizibil cu 5, şi $P_k \mapsto P_{k-3}$, pentru fiecare indice k divizibil cu 5; în acest fel, ea parcurge un ciclu de lungime n, care trece prin fiecare vârf al poligonului.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, astfel încât $AB < AC$. Fie M mijlocul laturii BC şi fie D un punct situat în interiorul segmentului AM. Fie E un punct interior al segmentului BD şi fie F punctul situat pe AB, astfel încât EF şi BC să fie paralele. Arătaţi că, dacă dreptele AE şi DF trec prin ortocentrul triunghiului ABC, atunci bisectoarele interioare ale unghiurilor BAC şi BDC se intersectează pe BC.

VLAD ROBU

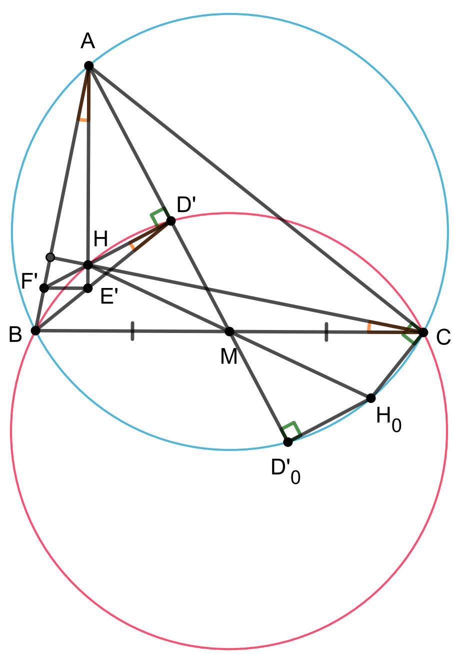
Soluţie. Fie H ortocentrul lui ABC, D' proiecţia lui H pe AM, $\{E'\} = BD' \cap AH$ şi $\{F'\} = D'H \cap AB$. Arătăm că $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$, deci $HD \perp AM$.

Fie H_0 şi D_0' simetricele punctelor H, respectiv D' faţă de M. Se ştie că H_0 este punctul de pe cercul circumscris triunghiului ABC diametral opus lui A şi, cum $m(\angle H_0D_0'A) =$

$m(\angle HD'M) = 90°$, punctul D'_0 este şi el pe cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci punctele B, C, H, D' se află pe simetricul acestui cerc faţă de M, adică patrulaterul $BHD'C$ este inscriptibil. Deducem că $m(\angle HD'E') = m(\angle HD'B) = m(\angle HCB) = 90° - m(\angle B) = m(\angle F'AH)$, deci patrulaterul $AF'E'D'$ este inscriptibil, de unde rezultă că $m(\angle F'E'A) = m(\angle F'D'A) = 90°$, aşadar că $E'F' \parallel BC$.

Dacă $D \in (AD')$, atunci $E \in (AE')$, iar punctul F, în care se intersectează dreptele AB şi DH, se află pe semidreapta deschisă $F'B$, cu originea în F', deci $EF \nparallel BC$. Analog în cazul $D \in (D'M)$. Rezultă că este necesar ca $D = D'$ şi atunci $E = E'$, $F = F'$.

Cum ABD'_0C este inscriptibil, $m(\angle ABD'_0) = 180° - m(\angle ACD'_0)$, deci $\sin(\angle ABD'_0) = \sin(\angle ACD'_0)$. Dar M fiind mijlocul lui $[BC]$, triunghiurile ABD'_0 şi ACD'_0 au arii egale, deci $AB \cdot BD'_0 \cdot \sin(\angle ABD'_0) = AC \cdot CD'_0 \cdot \sin(\angle ABD'_0)$, de unde $AB \cdot BD'_0 = AC \cdot CD'_0$, sau $AB \cdot CD = AC \cdot BD$, adică $AB/AC = DB/DC$, ceea ce, conform reciprocei teoremei bisectoarei, conduce la concluzie.



Stars 2017 — Solutions

Problem 1. Consider the sequence of integers a_0, a_1, a_2, …, where $a_n = n^6 - 2017$ if n is divisible by 7, and $a_n = \frac{1}{7}(n^6 - 2017)$ otherwise. Determine the largest length a string of consecutive terms sharing a common divisor greater than 1 may have.

The Editors

Solution. The required maximum is 2. That it is at least 2 follows from the fact that a_n and a_{n+1} are both divisible by 3, whenever n is congruent to 1 modulo 3.

To show it less than 3, we let $b_n = n^6 - 2017$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, and prove that

$$\gcd(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 0,\ \pm 1 \pmod 7, \\ 7 & \text{if } n \equiv \pm 2,\ \pm 3 \pmod 7. \end{cases}$$

Fix an index n, and let d be a positive integer dividing b_{n-1}, b_n and b_{n+1}. Since at least one of b_{n-1}, b_n, b_{n+1} is odd, so is d. The numbers $b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1} = 2(15n^4 + 15n^2 + 1)$ and $b_{n+1} - b_{n-1} = 4n(3n^4 + 10n^2 + 3)$ are both divisible by d. Since d is odd, it divides $15n^4 + 15n^2 + 1$, so d is coprime to n, hence it divides $3n^4 + 10n^2 + 3$ as well. Write $7 \cdot (5n^2 + 2) = 5 \cdot (3n^4 + 10n^2 + 3) - (15n^4 + 15n^2 + 1)$ to infer that $7 \cdot (5n^2 + 2)$ is divisible by d. Since $3 \cdot (5n^2 + 2)(5n^2 + 3) = 5 \cdot (15n^4 + 15n^2 + 1) + 13$, it follows that d is one of 1, 7, 13, $7 \cdot 13$. To conclude the proof, notice that no b_k is divisible by 13.

Problem 2. Let ABC be a triangle, let O and γ be its circumcentre and circumcircle, respectively, and let P and Q be distinct points interior to γ such that O, P and Q are not collinear. Reflect O in the midpoint of the segment PQ to obtain R, then reflect R in the centre of the nine-point circle of the triangle ABC to obtain S. The circle through P and Q, and orthogonal to γ, crosses the rays OP and OQ, emanating from O, again at P' and Q', respectively. Let the lines PQ' and QP' cross at T. Prove that, if P and Q are isogonally conjugate with respect to the triangle ABC, then so are S and T.

E. D. Camier, England

The points U and V are *isogonally conjugate* with respect to the triangle ABC if $\angle(AB, AU) = \angle(AV, AC)$ and $\angle(BC, BU) = \angle(BV, BA)$, in which case $\angle(CA, CU) = \angle(CV, CB)$ as well.

Solution. Use complex coordinates and the standard convention where O is the origin of the complex plane, and γ is the unit circle; as usual, a lower case Roman letter denotes the complex coordinate of the point denoted by the corresponding upper case Roman letter.

Begin by expressing t in terms of p, q and their complex conjugates. Since $p'\bar{p} = 1$ and $q'\bar{q} = 1$, the equations of the lines PQ' and QP' are

$$\bar{q}(1 - \bar{p}q)z - q(1 - p\bar{q})\bar{z} + \bar{p}q - p\bar{q} = 0 \quad \text{and} \quad \bar{p}(1 - \bar{q}p)z - p(1 - q\bar{p})\bar{z} + \bar{q}p - q\bar{p} = 0,$$

so the two cross at $t = (p + q - pq(\bar{p} + \bar{q}))/(1 - p\bar{p}q\bar{q})$.

Next, we turn to isogonal conjugates in the triangle ABC. Two points U and V in the plane ABC, not lying on γ, are isogonally conjugate in the triangle ABC if and only if $u + v + abc\bar{u}\bar{v} = a + b + c$; for completeness, a proof of this fact is provided at the end of the solution. In particular, $p + q + abc\bar{p}\bar{q} = a + b + c$.

Now, $r = p + q$, and the centre of the nine-point circle has complex coordinate $(a+b+c)/2$, so $s = a + b + c - p - q = abc\bar{p}\bar{q}$; since $s\bar{s} = p\bar{p}q\bar{q} < 1$, the point S does not lie on γ.

Let U be the isogonal conjugate of S in the triangle ABC to write $s+u+abc\bar{s}\bar{u} = a+b+c$, and refer to the above expressions of s to get $u+pq\bar{u} = p+q$. Elimination of $\bar{u}$ from the latter and its complex conjugate yields $u = (p+q-pq(\bar{p}+\bar{q}))/(1-p\bar{p}q\bar{q}) = t$, and the conclusion follows.

For completeness, we show that two points U and V in the plane ABC, not lying on γ, are isogonally conjugate in the triangle ABC if and only if $u+v+abc\bar{u}\bar{v} = a+b+c$.

If U and V are isogonally conjugate in the triangle ABC, isogonality at A implies that the product of $(u-a)/(b-a)$ and $(v-a)/(c-a)$ is real, so it is equal to its complex conjugate. Alternatively, but equivalently, $(u-a)(v-a) = a^2bc(\bar{u}-\bar{a})(\bar{v}-\bar{a})$, so $uv - a(u+v) + a^2 = a^2bc\bar{u}\bar{v} - abc(\bar{u}+\bar{v}) + bc$. Similarly, isogonality at B yields $uv - b(u+v) + b^2 = ab^2c\bar{u}\bar{v} - abc(\bar{u}+\bar{v}) + ca$. Subtract the two, factor $a-b$ out and rearrange terms to get the desired relation.

Conversely, let W be the isogonal conjugate of U in the triangle ABC to write $u+w+abc\bar{u}\bar{w} = a+b+c$. Elimination of u from the latter and $u+v+abc\bar{u}\bar{v} = a+b+c$ yields $v - w + abc\bar{u}(\bar{v}-\bar{w}) = 0$, and elimination of $\bar{v}-\bar{w}$ from the latter and its complex conjugate yields $(1-u\bar{u})(v-w) = 0$. Since U does not lie on γ, the first factor is different from zero, so $v = w$. This establishes the converse and completes the proof.

Problem 3. Let $2^{-n_1} + 2^{-n_2} + \cdots + 2^{-n_k} + \cdots$, where $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, be the binary expansion of $(\sqrt{5}-1)/2$. Prove that $n_k \le 2^{k-1} - 2$ for all integers $k \ge 4$.

Amer. Math. Monthly

Solution. We show that $n_{k+1} \le 2n_k + 2$ for all indices k. Since $n_4 = 6 = 2^{4-1} - 2$, the conclusion follows inductively. (None of the first three exponents, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 5$, satisfies the inequality in the statement.)

Write $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, $m = 2^{n_k}\sum_{j=1}^{k} 2^{-n_j}$ and $\beta = \alpha - m \cdot 2^{-n_k}$, and notice that $m \cdot 2^{-n_k} \le \sum_{j=1}^{n_k} 2^{-j} = 1 - 2^{-n_k} < 1$ and $\beta \le \sum_{j \ge n_{k+1}} 2^{-j} \le 2^{1-n_{k+1}}$. Since α is irrational, so is β, and therefore $0 < \beta < 2^{1-n_{k+1}}$.

Next, write $1 = \alpha + \alpha^2 = m \cdot 2^{-n_k} + m^2 \cdot 2^{-2n_k} + \beta\,(1 + 2m \cdot 2^{-n_k} + \beta)$, to infer that $2^{2n_k}\beta\,(1 + 2m \cdot 2^{-n_k} + \beta)$ is an integer; it is clearly positive, so it is at least 1.

By the preceding, $2^{2n_k}\beta\,(1 + 2m \cdot 2^{-n_k} + \beta) < 2^{2n_k+1-n_{k+1}}\left(1 + 2 + 2^{1-n_{k+1}}\right)$, so

$$2^{2n_k+1-n_{k+1}}\left(3 + 2^{1-n_{k+1}}\right) > 1.$$

Finally, since $n_{k+1} \ge n_2 = 4$, it follows that $3 + 2^{1-n_{k+1}} \le 3 + 1/8 < 2^2$, so $n_{k+1} < 2n_k + 3$; that is, $n_{k+1} \le 2n_k + 2$.

Problem 4. Consider a 7-point configuration consisting of the vertices of a quadrangle (not necessarily convex) along with three other points lying in the interior or on the boundary of the quadrangle. Every pair of distinct points in the configuration are at least 1 distance apart. Show that the diameter of the quadrangle is greater than 2.

Paul Erdős

Solution. Consider the closed discs of radius 1/2 centred at the three points in the configuration different from the vertices of the quadrangle.

If one of the sides of the quadrangle intersects two of these discs, then its length is at least $3\sqrt{3}/2 > 2$.

Henceforth, assume that no side intersects two discs and consider the number of sides intersecting none of the three discs.

If this number is at least two, then either the quadrangle covers at least two of the three discs or it covers one of these and at least half of each of the other two. Since it also covers the four sectors of radius $1/2$ centred at the vertices, and the six or seven sets just mentioned have pairwise disjoint interiors, the area of the quadrangle is greater than or equal to the total area of three discs of radius $1/2$. If the quadrangle is convex, then the longest diagonal has length at least $\sqrt{3\pi/2} > 2$. Otherwise, the convex hull of the configuration is a triangle whose longest side has length at least $\sqrt{3\pi/2} > 2$.

If the number of sides intersecting none of the three discs is at most one, then the quadrangle has at least three sides of length greater than or equal to $\sqrt{3}$ each.

Consider first the case where the quadrangle is convex. If it is a rectangle, then the length of the diagonal is at least $\sqrt{6} > 2$. Otherwise, a diagonal not passing through the vertex of an obtuse angle of the quadrangle (there is at least one such) has length greater than 2.

Finally, if the quadrangle is not convex, label its vertices A, B, C, D, in circular order along the boundary, so that D is interior to the triangle ABC. Notice that one of the sides emanating from D, say, AD, has length at least $\sqrt{3}$. Notice further that at least one of the triangles ABD and ACD is obtuse at D. Since $AD \geq \sqrt{3}$ and BD and CD are both at least 1, it follows that at least one of the segments AB and AC has length greater than 2.