



Probleme numerice

1. Rezultatul calculului $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{\frac{1}{n^3}}$ este:
a) \sqrt{e} b) $\sqrt[3]{e}$ c) ∞ d) nu există limita.
2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, A^n este de forma:
a) $2^{n-1} \begin{pmatrix} -n+2 & -n \\ n & n+2 \end{pmatrix}$ b) $2^n \begin{pmatrix} -n+2 & -n \\ n & n+2 \end{pmatrix}$ c) A d) I_2 .
3. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Rangul matricei $A^{2017} + A^{2018} + I_3$ este:
a) 0 b) 1 c) 3 d) 2.

Probleme de logică

1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = 3 + (-1)^n$. Valoarea $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$ este:
a) 3 b) 4 c) 2 d) 5.
2. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Atunci, A^{2014} este de forma:
a) εA b) $\varepsilon^2 A$ c) O_2 d) A .
3. Considerăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$. Pentru orice valori întregi ale a, b și c , Δ este divizibil cu:
a) 5 b) 7 c) 6 d) 10.

Aplicații practice

1. Mihai, George și Andrei, răătăciți pe munte, sunt nevoiți să-și instaleze cortul improvizat pentru a înnopta și a se feri de ploaie. Baza cortului este un triunghi echilateral, iar locul pe care îl au acum la dispoziție pentru campare, deloc prietenos, le dă mari bătaii de cap: este stâncos și nu pot înfige oriunde țărșii ce permit ancorarea colțurilor. Mihai găsește un petec de iarbă, iar George o limbă de pământ cu mai puține pietre. Scot repede o bucată de hârtie și fac o schiță: punctul ales de Mihai este reprezentat ca $M(0, 2)$ iar fâșia găsită de George ca axa Ox a unui reper cartezian conceput de ei. Când Mihai stă fix în punctul M , iar George se plimbă pe dreapta



sa Ox , Andrei trebuie să caute punctul pentru a campa vârful său de cort (respectiv, cel de-al treilea vârf al triunghiului echilateral de la bază) pe:

- a) o dreaptă b) într-un punct c) punctul nu se poate găsi d) reuniunea a două drepte.

Ajutați-l voi!

2. Presupunem că diametrul pupilei ochiului unui animal poate fi exprimat (în mm) cu ajutorul

funcției $f(x) = \frac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15}$, unde x este intensitatea luminii ce atinge pupila. Dacă notăm cu

m diametrul pupilei când intensitatea luminoasă este minimă și cu M diametrul la intensitate luminoasă maximă, valorile pentru m și M sunt:

- a) $m = 40 \text{ mm}$, $M = 6 \text{ mm}$, b) $m = 0,6 \text{ mm}$, $M = 4 \text{ mm}$ c) $m = 8 \text{ mm}$, $M = 15 \text{ mm}$
 d) $m = 14 \text{ mm}$, $M = 24 \text{ mm}$.

3. Mircea și Vlad au o pasiune: codurile secrete, încifrarea și descifrarea mesajelor. Pentru aceasta, au nevoie doar de o matrice inversabilă $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Cu cât n este mai mare, cu atât codarea mesajelor este mai complexă. De data aceasta, pentru simplitatea calculelor, vor alege o

matrice $A \in M_3(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, numită matrice de codare. Apoi, asociază fiecărei litere

din alfabet câte un număr, la fel și spațiilor sau semnelor de întrebare și exclamare, după cum urmează:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Z		?	!																					
26	27	28	29																					

Aleg mesajul care urmează a fi codat și folosind corespondența de mai sus, dau câte un număr fiecărei litere din mesajul ales. Totuși, pentru a-și ușura calculele, vor elimina spațiile dintre cuvinte.

I M A G I N A T I O N I S M O REIMPORTANTTHANKNOWLEDGE
 9 13 1 7 9 14 1 20 9 15 14 9 19 13 15

Apoi, așază vertical numerele într-o matrice cu trei linii. Acum, aleg să codeze doar primele 15

litere ale mesajului. Matricea obținută este $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$.

Înmulțesc matricea de codare A cu matricea obținută:



Nume și prenume elev:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 15 & 34 & 178 & 209 \\ 112 & 108 & 331 & 63 & 190 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$$

și împart cele 15 numere obținute la 29 și formează o nouă matrice doar cu resturile rezultate:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}. \text{ Asociind fiecărei cifre litera corespunzătoare, găesc:}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}, \text{ iar mesajul codat este EYP?UQEDODRIFPU.}$$

Pentru a decripta un mesaj, se așază, la fel, vertical, numerele într-o matrice. Apoi se determină inversa matricei de codare și se înmulțește la stânga cu matricea mesajului de decriptat. Valorile din matricea produs sunt împărțite apoi la 29, respectând întocmai teorema împărțirii cu rest (deîmpărțitul = împărțitorul \times câtul + restul, unde restul este întotdeauna un număr pozitiv, strict mai mic decât împărțitorul!).

Acum, Mircea și Vlad vă roagă ca, folosind aceeași matrice de criptare, să criptați ultimele două litere ale mesajului și să decriptați următorul cuvânt de 9 caractere:

ANSK UKJJ. Cele 2 mesaje vor fi:

- a) UJGEKOKG , GEOMETRIE b) KVBJ!AFXE, PRIMAVARA c) UJGEKOKG , PRIMAVARA
d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.



Probleme numerice

1. Rezultatul calculului $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2 \cdot x] + \dots + [14 \cdot x]}{x}$ este:
 a) 105 b) 0 c) ∞ d) nu există limita.
2. Perechea de numere reale (x, y, z) pentru care are loc suma $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & -2 & 0 \\ y & z & 2 \end{pmatrix}$,
 $A \in M_3(\mathbb{R})$ este:
 a) $(2, 4, 6)$ b) $(6, 4, 2)$ c) $(4, 6, 0)$ d) $(4, 0, 6)$.
3. Rezultatul calculului $\begin{vmatrix} 1 - 2^{2016} - 2016^2 & \sqrt{2016} & \sqrt{2016} \\ 2^{2016} & 1 - 2016^2 - \sqrt{2016} & 2^{2016} \\ 2016^2 & 2016^2 & 1 - 2^{2016} - \sqrt{2016} \end{vmatrix}$ este:
 a) $(1 + 2^{2016} + 2016^2 + \sqrt{2016})^2$ b) $(1 - 2^{2016} - 2016^2 - \sqrt{2016})^2$ c) $2^{2016} \cdot 2016^2 \cdot \sqrt{2016}$ d) 0.

Probleme de logică

1. Valorile $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - 2ax - 3b \right) = 1$ sunt:
 a) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ b) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$ c) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$ d) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3}$.
2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci $\sum_{k=1}^{2016} A^k$ este egală cu:
 a) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 4032 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2017} - 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2016} - 1 \end{pmatrix}$.
3. Dacă $M = \sum_{a \in A} a^2$, unde $A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid B^* = B^{-1}, B = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -3 & 5 & -3 \\ -a & a & 0 \end{pmatrix} \right\}$, atunci
 a) $M = 0$ b) $M = 2$ c) $M = 1$ d) $M = 4$.

Aplicații practice

1. Într-un bazin ce conține 10 litri de apă în stare pură este pompată apa sărată ce are o concentrație de 20 de grame la litru cu o viteză de 2 litri pe minut. Expresia concentrației de sare $C(t)$ (exprimată în g/l) după t minute, precum și concentrația pe termen lung a sării, respectiv, $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ vor fi:
 a) $C(t) = \frac{20t}{5+t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 20$ b) $C(t) = \frac{100t}{5+20t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 5$ c) $C(t) = \frac{10t}{1+20t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{1}{2}$



Nume și prenume elev:

d) $C(t) = \frac{20t}{1+10t}, \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 2.$

2. Trei muncitori au realizat împreună 2064 de piese. Primul muncitor a realizat 140% din ceea ce a realizat al doilea muncitor, iar 60% din cât a realizat al doilea muncitor este cu 15% mai mult decât 25% din ceea ce a realizat al treilea muncitor. Câte piese a realizat al doilea muncitor?

- a) 460 b) 644 c) 504 d) 960

3. Andrei și George își deschid un fast-food, urmând să comercializeze trei tipuri de sandwich-uri: (1) cu pâine, unt și dulceață, (2) pâine, șuncă și cașcaval și (3) pâine, cașcaval și sosuri. În zorii fiecărei zile, Andrei (A) și George (G) își planifică să vândă din cele trei tipuri de sandwichuri utilizând o matrice

$M, M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(2 \times 3)}(N).$ Fiecare sandwich poate conține felii de pâine (p), cuburi de unt

(u), lingurițe de dulceață (d), felii de șuncă (s), felii de cașcaval (c), lingurițe de sosuri (m). Necesarul

pentru toate acestea este reprezentat într-o altă matrice, $N = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(3 \times 6)}(N).$

Pentru a determina necesarul pentru sandwich-urile din matricea M, George face următorul calcul: $3(2) + 3(2) + 6(2) = 24$ felii de pâine (p), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cuburi de unt (u), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ lingurițe de dulceață (d), ș.a.m.d, iar rezultatul este trecut într-o matrice

$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 & 15 & 22 & 6 \\ 24 & 12 & 12 & 9 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(2 \times 6)}(N).$ Costul în lei al ingredientelor folosite este trecut în

matricea $C = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Cost} \\ p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,10 \\ 0,30 \\ 0,25 \\ 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Cost} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,24 \\ 1,64 \\ 1,84 \end{pmatrix} \end{matrix}.$ Acum, Andrei și George ar dori să știe de

câți bani are nevoie fiecare pentru a prepara toate sandwich-urile cuprinse în matricea M.

- a) A = 18,46; G = 19,25 b) A = 17,60; G = 17,52 c) A = 18,46; G = 19,25 d) A = 16,50; G = 19.