Mathematik-Wettbewerb Mathmoiselle

2.06.2016

XI Klasse/M₁

NAME und VORNAME der Schüler:

Zahlenaufgaben

1. Das Ergebnis der Rechnung $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{1}{n^3}}$ ist:

   a) $\sqrt{e}$ *b)* $\sqrt[3]{e}$ *c)* ∞ *d)* nu există limita.

2. Es sei $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M_2(R)$. Für $n\in N^*$, A^n ist der Form:

   a) $2^{n-1}\begin{pmatrix}-n+2 & -n\\ n & n+2\end{pmatrix}$ *b)* $2^n\begin{pmatrix}-n+2 & -n\\ n & n+2\end{pmatrix}$ *c)* A *d)* I_2.

3. Es sei $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(R)$. Rang Matrix $A^{2017}+A^{2018}+I_3$ ist:

   a) 0 *b)* 1 *c)* 3 *d)* 2.

Logik Aufgaben

1. Es sei der String $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=3+(-1)^n$. Der Wert $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)$ ist:

   a) 3 *b)* 4 *c)* 2 *d)* 5.

2. Es sei $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\varepsilon & -\varepsilon\end{pmatrix}\in M_2(C)$, wo $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Dann, A^{2014} ist der Form:

   a) εA *b)* $\varepsilon^2 A$ *c)* O_2 *d)* A.

3. Wir betrachten die Determinante $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$. Für alle ganzen Zahlen a, b și c,

   Δ ist teilbar durch :

   a) 5 *b)* 7 *c)* 6 *d)* 10.

Praktischeaufgaben

1. Mihai, George und Andrei haben sich im Gebirge verirrt. Sie sind gezwungen ein improvisiertes Zelt aufzubauen, um zu übernachten und um sich vor dem Regen zu schützen. Die Grundfläche des Zeltes ist ein gleichseitiges Dreieck und der Platz den sie zur Verfügung haben ist höchst unfreundlich und bereitet ihnen Probleme zu: er ist felsig und sie können nicht überall die Pfähle in den Boden versenken, um das Zelt abzuspannen. Mihai entdeckt eine Grasfläche und George eine Fläche mit wenig Steinen. Sie nehmen ein Blatt Papier und zeichnen eine Skizze: der von Mihai gewählte Punkt wird als M (0,2) dargestellt und die von George gefundene Fläche als die Achse Ox eines von ihnen erfundenen ein kartesischen Bezug. Wenn Mihai im

Punkt M unbewegt steht und George auf seiner Geraden Ox spaziert, muss Andrei den Punkt suchen, um seine Ecke des Zeltes (bzw. den dritten Winkel des gleichseitigen Dreiecks, das die Grundfläche bildet) aufzustellen :

a) auf einer Geraden *b)* in einem Punkt *c)* man kan den Punkt nicht finden

d) Vereinigung von zwei geraden

Helft ihr ihm!

2. Wir nehmen an, dass der Durchmesser der Pupillen eines Tierauges mit Hilfe der Funktion $f(x)=\dfrac{160x^{-0,4}+90}{4x^{-0,4}+15}$, ausgedrückt werden kann (in mm), wobei x die Lichtintensität, welche die Pupille erreicht, darstellt. Wenn wir den Durchmesser des Auges bei minimaler Lichtintensität mit *m* notieren und mit *M* den Durchmesser bei maximaler Lichtintensität, dann sind die Werte für *m* und *M :*

a) m = 40 mm, M = 6 mm, *b) m = 0,6 mm, M = 4 mm* *c) m = 8 mm, M = 15 mm*

d) m = 14 mm, M = 24mm.

3. Mircea und Vlad haben eine Leidenschaft: die Geheimcodes, das Codieren und Decodieren der Nachrichten. Dafür benötigen sie nur die Umkehrmatrix $A\in M_n\left(Z\right)$. Je grüßer n ist, umso komplexer ist die Codierung der Nachrichten. Um die Rechnungen zu vereinfachen werden sie diesmal einen Matrix

$A\in M_3\left(Z\right),\ A=\begin{pmatrix}6&5&2\\5&5&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, aussuchen, welche <u>Codierungsmatrix</u> genannt wird.

Danach assoziieren sie jedem Buchstaben des Alphabets eine Zahl, wie auch den Zwischenräumen oder den Frage- und Ausrufezeichen, so wie folgt:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Z		?	!
26	27	28	29

Sie wählen die Nachricht aus, die codiert werden muss, benutzen das oben Gegebene und ordnen jedem Buchstaben der Nachricht eine Zahl zu. Um jedoch die Rechnungen zu vereinfachen, werden sie die Zwischenräume zwischen den Wörtern entfernen.

I M A G I N A T I O N I S M O REIMPORTANTTHANKNOWLEDGE
9 13 1 7 9 14 1 20 9 15 14 9 19 13 15 …………………………………………..

Danach setzen sie die Zahlen senkrecht in eine Matrix mit drei Linien ein. Nun codieren sie nur die ersten 15 Buchstaben der Nachricht. Die erhaltene Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(Z).$$

Sie multiplizieren die Codierungsmatrix A mit der erhaltenen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 115 & 34 & 178 & 209 \\ 112 & 108 & 33 & 163 & 190 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(Z)$$

und teilen die 15 erhaltenen Zahlen durch 29. So erhalten sie nur mit Hilfe der daraus hervorgegangenen Ergebnisse eine neue Matrix: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}$.

Indem sie jeder Ziffer den entsprechenden Buchstaben assoziieren, erhalten sie:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}$$, und die codierte Nachricht ist EYP?UQEDODRIFPU.

Um eine Nachricht zu decodieren werden die Zahlen senkrecht in eine Matrik gesetzt. Dann wird die Umkehrung der Codierungsmatrix bestimmt und links mit der Matrix der Decodierungsnachricht multipliziert. Die Werte der Produktmatrix werden durch 29 geteilt, indem man die Regeln der Division mit Rest (Dividend = Divisor x Quotient + Rest, wobei der Rest immer eine positive Zahl ist, unbedingt kleiner als der Divisor) befolgt.

Nun bitten euch Mircea und Vlad, dass ihr die letzten neun Buchstaben der Nachricht codiert, indem ihr die gleiche Codierungsmatrix verwendet und dass ihr das Wort
ANSK UKJJ, welches 9 Zeichen enthällt, decodiert. Die zwei Nachrichten sind:

a)UJGEKOKG , GEOMETRIE *b)* KVBJ!AFXE, PRIMAVARA *c)* UJGEKOKG , PRIMAVARA

d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.

Zahlenaufgaben

1. Das Ergebnis der Rechnung $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]+[2\cdot x]+...+[14\cdot x]}{x}$ ist:

a) 105 *b)* 0 *c)* ∞ *d)* es gibt keine Begrenzung.

2. Paar von reellen Zahlen (x,y,z) für welche die Summe $A+{}^{t}A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ x & -2 & 0\\ y & z & 2\end{pmatrix}$, $A\in M_3(R)$ ist:

a) (2, 4, 6) *b)* (6, 4, 2) *c)* (4, 6, 0) *d)* (4, 0, 6).

3. Das Ergebnis der Rechnung

$$\begin{vmatrix}1-2^{2016}-2016^2 & \sqrt{2016} & \sqrt{2016}\\ 2^{2016} & 1-2016^2-\sqrt{2016} & 2^{2016}\\ 2016^2 & 2016^2 & 1-2^{2016}-\sqrt{2016}\end{vmatrix}$$ ist:

a) $\left(1+2^{2016}+2016^2+\sqrt{2016}\right)^2$ *b)* $\left(1-2^{2016}-2016^2-\sqrt{2016}\right)^2$ *c)* $2^{2016}\cdot 2016^2\cdot\sqrt{2016}$ *d)* 0.

Logik Aufgaben

1. Der Werte $a,b\in R$,so dass $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-2ax-3b\right)=1$ sind:

a) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$ *b)* $a=-\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$ *c)* $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{3}$ *d)* $a=\frac{1}{2},b=-\frac{2}{3}$.

2. Es sei $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in M_2(R)$. Dann $\sum\limits_{k=1}^{2016}A^k$ ist gleich mit:

a) $\begin{pmatrix}2016 & 0\\ 0 & 4032\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2016 & 0\\ 0 & 2^{2016}\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}2016 & 0\\ 0 & 2^{2017}-2\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}2016 & 0\\ 0 & 2^{2016}-1\end{pmatrix}$.

3. Wenn $M=\sum\limits_{a\in A}a^2$, $A=\left\{a\in R\mid B^*=B^{-1},B=\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ -3 & 5 & -3\\ -a & a & 0\end{pmatrix}\right\}$, dann

a) $M=0$ *b)* $M=2$ *c)* $M=1$ *d)* $M=4$

Mathematik-Wettbewerb Mathmoiselle
2.06.2016
XI Klasse/M2
NAME und VORNAME der Schüler:

Praktischeaufgaben

1. In einem Becken das 10 Liter Wasser in purem Zustand enthält, wird Salzwasser mit einer Konzentration von 20 g pro Liter und mit der Geschwindigkeit von 2 Liter pro Minute gepumpt. Der Ausdruck der Salzkonzentration C(t) (ausgedrückt in g/l) nach t Minuten, wie auch die langfristige Salzkonzentration bzw. $\lim_{t\to\infty} C(t)$ werden betragen:

a) $C(t)=\dfrac{20t}{5+t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=20$ *b)* $C(t)=\dfrac{100t}{5+20t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=5$ *c)* $C(t)=\dfrac{10t}{1+20t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=\dfrac{1}{2}$

d) $C(t)=\dfrac{20t}{1+10t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=2$.

2. Drei Arbeiter haben zusammen 2064 Ersatzteile produziert. Der erste Arbeiter hat 140% der Teile, die der zweite Arbeiter geleistet hat produziert. 60% der Teile des zweiten Arbeiters sind um 15% mehr als 25% der vom dritten Arbeiter geleisteten Produktion. Wieviele Ersatzteile hat der zweite Arbeiter produziert?

a) 460 b) 644 c) 504 d) 960

3. Andrei und George wollen sich ein Fast-Food-Restaurant eröffnen. Dort wollen sie drei Sandwich-Arten verkaufen: (1) mit Brot, Butter und Marmelade, (2) Mit Brot, Schinken und Käse, (3) mit Brot, Käse und Soßen. Jeden Morgen machen sich Andrei (A) und George (G) den Plan jede der drei Sandwich-Arten zu verkaufen, indem sie eine Matrix

$$M,\ M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{(2\times 3)}(N).$$

Jedes Sandwich kann Brotscheiben (p), Butterwürfel (u), Löffelchen Marmelade (d), Schinkenscheiben (s), Käsescheiben (c), Löffelchen Soße (m) enthalten. Die notwendingen Zutaten werden in einer anderen Matrix,

$$N=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 40 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 03 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 00 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{(3\times 6)}(N) \text{ dargestellt.}$$

Um die für die Matrix M notwendingen Zutaten zu bestimmen, macht George folgende Rechnung: 3(2) + 3(2) + 6(2) = 24 Brotscheiben (*p*), 3(4) + 3(0) + 6(0) = 12 Butterwürfel (*u*), 3(4) + 3(0) + 6(0) = 12 Löffelchen Marmelade (*d*), usw;
Das Ergebnis wird in einer Matrix P

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 1615 & 22 & 6 \\ 24 & 12 & 129 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{(2\times 6)}(N) \text{ eingetragen.}$$

Die in Lei für die verbrauchten Zutaten angegebenen Kosten werden in der Matrix C

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{array}\!\!\begin{array}{c} Cost \\ \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,10 \\ 0,30 \\ 0,25 \\ 0,12 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} Cost \\ \begin{pmatrix} 1,24 \\ 1,64 \\ 1,84 \end{pmatrix} \end{array}$$

eingetragen.

Nun möchten Andrei und George gerne wissen wieviel Geld jeder benötigt, um alle in Matrix M umfassten Sandwichs vorzubereiten.

*a)*A= 18,46; G = 19,25 *b)*A= 17,60; G = 17,52 *c)*A = 18,46; G = 19,25 *d)* A = 16,50; G = 19.