Concours de mathématique en langues modernes Mathmoiselle, VII-ème édition, 2.06.2016

XI-ème classe/M1

Nom et prénom de l'élève:

Problèmes numériques

1. Le résultat du calcul $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{1}{n^3}}$ est:

   a) $\sqrt{e}$ *b)* $\sqrt[3]{e}$ *c)* ∞ *d)* nu există limita.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M_2(R)$. Pour $n\in N^*$, A^n a la forme:

   a) $2^{n-1}\begin{pmatrix}-n+2 & -n\\ n & n+2\end{pmatrix}$ *b)* $2^n\begin{pmatrix}-n+2 & -n\\ n & n+2\end{pmatrix}$ *c)* A *d)* I_2.

3. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(R)$. Le rang de la matrice $A^{2017}+A^{2018}+I_3$ est:

   a) 0 *b)* 1 *c)* 3 *d)* 2.

Problèmes de logique

1. Soit la rangée $(a_n)_{n\geq 1}$ avec $a_n=3+(-1)^n$. La valeur de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)$ est:

   a) 3 *b)* 4 *c)* 2 *d)* 5.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\varepsilon & -\varepsilon\end{pmatrix}\in M_2(C)$, où $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Par conséquent, A^{2014} a la forme:

   a) εA *b)* $\varepsilon^2 A$ *c)* O_2 *d)* A.

3. On considère le déterminant $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$. Pour toutes les valeurs entières des a,b et c, Δ est divisible par:

   a) 5 *b)* 7 *c)* 6 *d)* 10.

Applications pratiques

1. Mihai, George et Andrei, qui se sont égarés à la montagne, doivent installer leur tente improvisée afin de passer la nuit et se protéger de la pluie. La base de la tente est un triangle équilatéral, et l'endroit qu'ils ont maintenant à leur disposition n'est pas du tout facile. En effet, c'est un casse tête : il est rocailleux et ils ne peuvent pas planter n'importe où les pieux qui aident à l'ancrage des coins.
   Mihai trouve un lopin herbeux et George découvre une langue de terre moins rocailleuse. Ils sortent tout de suite une feuille de papier et forment une esquisse: le point choisi par Mihai est représenté comme $M(0,2)$ et la langue de terre trouvée par George comme l'axe Ox d'un repère cartésien qu'ils ont conçu. Le moment où Mihai se tient exactement dans le point *M* et

George se déplace sur sa droite Ox, Andrei doit chercher le point pour établir la pointe de sa teinte (respectivement la troisième pointe du triangle équilatéral à la base) sur :

a) une ligne droite *b)* un point *c)* un point impossible à trouver *d)* la réunion des deux lignes droites.

Voulez- vous l'aider?

2. On présuppose que le diamètre de la pupille oculaire d'un animal peut être exprime (en millimètres) à l'aide de la fonction $f(x)=\dfrac{160x^{-0,4}+90}{4x^{-0,4}+15}$, où x représente l'intensité de la lumière qui touche la pupille. Si on dénomme m le diamètre de la pupille quand l'intensité de la lumière est minimale et avec M le diamètre à l'intensité maximale, les valeurs pour m et M sont:

a) m = 40 mm, M = 6 mm, *b) m = 0,6 mm, M = 4 mm* *c) m = 8 mm, M = 15 mm*

d) m = 14 mm, M = 24mm.

3. Mircea et Vlad ont la même passion : les codes secrètes, ça veut dire chiffrer et déchiffrer des messages. Pour cela, ils ont besoin seulement d'une matrice inversable $A \in M_n(Z)$. Tant que n devient plus grand, autant que la codification des messages devient plus complexe. Cette fois-ci, pour simplifier les calculs, ils choisissent une matrice $A \in M_3(Z)$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, considérée comme matrice de codification. Ensuite, ils associent à chaque lettre de l'alphabet un nombre et ils procèdent a la même manière pour les espaces et pour les points d'interrogation ou d'exclamation, comme dans la suite:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Z		?	!
26	27	28	29

Ensuite, ils choisissent le message qui va être codifié et, en utilisant la correspondance ci-dessus, ils attribuent un nombre à chaque lettre utilisée dans le message choisi. Tout de même, afin de simplifier leurs calculs, ils éliminent les espaces entre les mots.

I M A G I N A T I O N I S M O REIMPORTANTTHANKNOWLEDGE
9 13 1 7 9 14 1 20 9 15 14 9 19 13 15 ……………………………………….

Ensuite, ils placent verticalement les nombres dans une matrice à trois lignes. Maintenant, ils choisissent à codifier seulement les premières 15 lettres de ce message. La matrice obtenue est

$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3\times5}(Z)$. Ils multiplient la matrice de codification *A* par la matrice obtenue:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 115 & 34 & 178 & 209 \\ 112 & 108 & 33 & 163 & 190 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3\times5}(Z)$$

et ensuite divisent les 15 nombres obtenus par 29 et forment une nouvelle matrice seulement avec les restes résultés: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}$. Maintenant, en associant à chaque chiffre la lettre correspondante, ils trouvent: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}$, et le message codifié est EYP?UQEDODRIFPU.

Afin de décrypter un message, on dispose de même manière, verticalement, les nombres dans une matrice. Ensuite on détermine l'inverse de la matrice à codifier et on multiplie à la gauche par la matrice du message à décrypter.
Les valeurs de la matrice produit sont ensuite divisées par 29, en suivant la théorème de
la division à reste ; (le dividende = le diviseur x le quotient + le reste, ou le reste est toujours est un nombre positif, strictement moindre que le diviseur !).

Maintenant, Mircea et Vlad vous prisent a crypter, en utilisant la même matrice de codification, les dernières neuf lettres du message et de décrypter le mot suivant, en 9 lettres : ANSK UKJJ.
Les deux messages vont être:

a) UJGEKOKG , GEOMETRIE *b)* KVBJ!AFXE, PRIMAVARA *c)* UJGEKOKG , PRIMAVARA

d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.

Concours de mathématique en langues modernes Mathmoiselle, VII-ème édition, 2.06.2016

XI-ème classe/M2

Nom et prénom de l'élève:

Problèmes numériques

1. Le résultat du calcul $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[2\cdot x]+\ldots+[14\cdot x]}{x}$ est:

   a) 105 *b)* 0 *c)* ∞ *d)* il n'y a pas aucune limite.

2. La paire des nombres réels (x,y,z) pour laquelle il y a la somme $A+{}^tA=\begin{pmatrix}2&4&6\\x&-2&0\\y&z&2\end{pmatrix}$, $A\in M_3(R)$ est:

   a) (2, 4, 6) *b)* (6, 4, 2) *c)* (4, 6, 0) *d)* (4, 0, 6).

3. Le résultat du calcul $\begin{vmatrix}1-2^{2016}-2016^2 & \sqrt{2016} & \sqrt{2016}\\ 2^{2016} & 1-2016^2-\sqrt{2016} & 2^{2016}\\ 2016^2 & 2016^2 & 1-2^{2016}-\sqrt{2016}\end{vmatrix}$ est:

   a) $\left(1+2^{2016}+2016^2+\sqrt{2016}\right)^2$ *b)* $\left(1-2^{2016}-2016^2-\sqrt{2016}\right)^2$ *c)* $2^{2016}\cdot 2016^2\cdot\sqrt{2016}$ *d)* 0.

Problèmes de logique

1. Les valeurs $a,b\in R$ de sorte que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-2ax-3b\right)=1$ sont:

   a) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$ *b)* $a=-\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$ *c)* $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{3}$ *d)* $a=\frac{1}{2},b=-\frac{2}{3}$.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\in M_2(R)$. Par conséquent $\sum\limits_{k=1}^{2016}A^k$ est égale à:

   a) $\begin{pmatrix}2016&0\\0&4032\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2016&0\\0&2^{2016}\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}2016&0\\0&2^{2017}-2\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}2016&0\\0&2^{2016}-1\end{pmatrix}$.

3. Si $M=\sum\limits_{a\in A}a^2$, où $A=\left\{a\in R \mid B^*=B^{-1}, B=\begin{pmatrix}0&a&-a\\-3&5&-3\\-a&a&0\end{pmatrix}\right\}$, par conséquent

   a) M = 0 *b)* M = 2 *c)* M = 1 *d)* M = 4.

Concours de mathématique en langues modernes Mathmoiselle, VII-ème édition, 2.06.2016

XI-ème classe/M2

Nom et prénom de l'élève:

Applications pratiques

1. Dans un basin qui contient 10 litres d'eau à l'état pur on pompe d'eau saline qui a une concentration de 20 grammes pour un litre à une vitesse de 2 litres par minute. L'expression de la concentration du sel *C(t)* (exprimée en g/l) après *t* minutes, et aussi la concentration du sel à long terme, respectivement $\lim_{t\to\infty} C(t)$ seront :

a) $C(t)=\frac{20t}{5+t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=20$ *b)* $C(t)=\frac{100t}{5+20t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=5$ *c)* $C(t)=\frac{10t}{1+20t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=\frac{1}{2}$

d) $C(t)=\frac{20t}{1+10t}, \lim_{t\to\infty} C(t)=2$.

2. Trois ouvriers ont réalisé ensemble 2064 pièces. Le premier a réalisé 140% de ce que la deuxième a realisé, et 60% de ce que a'réalisé le deuxième est avec 15% plus que 25% de ce que le troisième ouvrier a réalisé. Combien de pièces a réalisé le deuxième ouvrier ?

a) 460 b) 644 c) 504 d) 960

2. André et Georges ouvrent un fast food pour commercialiser trois types de sandwich : *(1)* avec du pain, du beurre et de la confiture, *(2)* avec du pain, du jambon et du fromage, et *(3)* avec du pain, du fromage et des sauces. A l'aube de chaque jour, André *(A)* et Georges *(G)* se proposent de vendre les trois types de sandwich en utilisant une matrice *M*, $M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{(2\times3)}(N)$. Chaque sandwich peut contenir des tranches de pain *(p)*, des cubes de beurre *(u)*, des cuillerées de confiture *(d)*, des tranches de jambon *(s)*, des tranches de fromage *(c)*, des cuillerées de sauce *(m)*. Le nécessaire pour toutes ces choses est représenté dans une autre matrice,

$N = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 40 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 03 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 00 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{(3\times6)}(N)$. Afin de déterminer le nécessaire pour les sandwiches de la matrice *M*, Georges effectue le calcul suivant : $3(2) + 3(2) + 6(2) = 24$ tranches de pain *(p)*, $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cubes de beurre *(u)*, $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cuillerées de confiture *(d)*, et le résultat est noté dans une matrice

Concours de mathématique en langues modernes Mathmoiselle, VII-ème édition, 2.06.2016

XI-ème classe/M2

Nom et prénom de l'élève:

$$P=\begin{array}{c} \\ A \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 & 15 & 22 & 6 \\ 24 & 12 & 12 & 9 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\in M_{(2\times 6)}\left(N\right)$$. Le coût des ingrédients utilisés est noté

dans la matrice $$C=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & u & d & s & c & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{array}\begin{array}{c} Cost \\ \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}15 \\ 0{,}10 \\ 0{,}30 \\ 0{,}25 \\ 0{,}12 \end{pmatrix} \end{array}=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} Cost \\ \begin{pmatrix} 1{,}24 \\ 1{,}64 \\ 1{,}84 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Maintenant, André et Georges veulent savoir quelle est la somme nécessaire pour préparer tous les sandwiches contenus dans la matrice *M.*

*a)*A= 18,46; G = 19,25 *b)*A= 17,60; G = 17,52 *c)*A = 18,46; G = 19,25 *d)* A = 16,50; G = 19.