Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a VI-a

Subiectul I

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţiile:

a) $5xy + 11z = 55$.

b) $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{7}{6}$

Barem de corectură şi notare:

a) Din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow 5|11z$ şi cum $(5, 11) = 1 \Rightarrow 5|z$ (1)

Din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow z \leq 5$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow z \in \{0, 5\}$ 1p

$z = 0 \Rightarrow xy = 11$, de unde $(x, y) \in \{(1, 11),\ (11, 1)\}$ 1p

Dacă $z = 5$, atunci din $5xy + 11z = 55 \Rightarrow xy = 0$, de unde $x = 0$ şi $y \in \mathbb{N}$ sau $x \in \mathbb{N}$ şi $y = 0$ 1p

Deci $(x, y, z) \in \{1, 11, 0\},\ (11, 1, 0), (0,\ k,\ 5),\ (q, 0, 5)\}$ de unde $k,\ q \in \mathbb{N}$ 1p

b) Avem $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow 6a^2 = b(7a - 6)$, de unde

$7a - 6|6a^2 \Rightarrow 7a - 6|42a^2 \Rightarrow 7a - 6|42a^2 - 36a + 36a \Rightarrow$

$\Rightarrow 7a - 6|6a(7a - 6) + 36a \Rightarrow 7a - 6|36a \Rightarrow$

$\Rightarrow 7a - 6|7 \cdot 36a \Rightarrow 7a - 6|36(7a - 6) + 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7a - 6|216$ sau $7(a - 1) + 1|216 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7(a - 1) + 1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216\}$ 1p

de unde $7(a - 1) + 1 \in \{1, 8, 36\}$ şi $a \in \{1, 2, 6\}$ 1p

Înlocuind pe a în ecuaţia dată se obţine soluţiile:

$a = 1,\ b = 6;\ a = 2,\ b = 3$ şi $a = 6,\ b = 6$ 1p

Subiectul II

Fie şirul de numere naturale 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...

a)Determinaţi următorii trei termeni ai şirului.

b)Precizaţi dacă numărul 781 este termen al şirului.

Barem de corectură şi notare:

Notăm termenii şi cu $a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_n, ...$

Avem:

$a_1 = 1 = 1$

$a_2 = 2 = 1 + 1$

$a_3 = 4 = 1 + 1 + 2$

$a_4 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3$

$a_5 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$

$a_6 = 16 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$a_7 = 22 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$a_8 = 29 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$a_9 = 37 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ 1p

Următorii trei termeni ai şirului sunt: 22, 29, 37 .... 1p

b) Observăm că: $a_2 = a_1 + 1,\ a_3 = a_2 + 2,\ a_4 = a_3 + 3, ...$ 1p

Deci $a_n = a_{n-1} + (n-1) = [1 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-2)] + (n-1) = 1 + (n-1)n : 2$ 1p

781 este termeni al şirului dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + (n-1)n : 2 = 781$,

adică $n(n-1) = 1560 = 40 \cdot 39$ 2p

Deci 781 este al 40-lea termen al şirului 1p

Subiectul III

a)Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiţia: $c^3 + c^2 + c = \overline{abc}$.

b)Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că $(a+1)(a^2+2a) + b = 213$, iar b este număr prim.

Barem de corectură şi notare:

a) $\overline{abc} = c^3 + c^2 + c \ \Rightarrow\ 10 \cdot \overline{ab} = c^2(c+1)$ 1p

Deci $100 \leq c^2(c+1) < 100$, de unde $5 \leq c \leq 9$ 1p

Însă $10|c^2(c+1)$, de unde $c \in \{5, 9\}$ 1p

Se obţine: $\overline{abc} \in \{155,\ 819\}$ 1p

b) $(a+1)(a^2+2a) = a(a+1)(a+2)$ fiind produs de 3 numere consecutive, acesta se divide cu 3. . 1p

Din $3|(a+1)(a^2+2a)$ şi $3|213 \ \Rightarrow 3|b$ şi cum b este prim rezultă $b = 3$ şi $a(a+1)(a+2) = 210$, de unde $a = 5$ 2p