Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a X-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Fie x cu proprietatea că numerele x^3+x şi x^5+x sunt raţionale. Să se arate că x este număr raţional.

Soluţie:

Fie $x^3+x=a$, $x^5+x=b$ $a,\ b\in\mathbb{Q}$ 0.5p

Considerăm:

$-ax^2=-x^5-x^3$

$b=x^5+x$ 1p

de unde prin adunare obţinem: $-ax^2+b=-x^3+x$ sau $-x^3+ax^2+x-b=0$ 0.5p

sau $-a+x+ax^2+x-b=0$ 0.5p

sau

(1) $ax^2+2x-(a+b)=0$ 0.5p

Înmulţim (1) cu x şi obţinem

$ax^3+2x^2-(a+b)x=0$ 0.5p

sau

$a(a-x)+2x^2-(a+b)x=0$

sau

(2) $2x^2-(2a+b)x+a^2=0$ 1p

Înmulţim (1) cu 2 şi (2) cu $-a$, adunăm relaţiile obţinute şi obţinem:

$(2a^2+ab+4)x-a^3-2a-2b=0$ 1p

Cum $2a^2+ab+4=2a^2+(x^3+x)(x^5+a)+4=2a^2+x^2(x^2+1)(x^4+1)+4>0$ 0.5p

rezultă $x=\frac{a^3+2a+2b}{2a^2+ab+4}\in\mathbb{Q}$ 1p

Subiectul II.

Pentru orice număr natural k, să se găsească cel mai mic n natural nenul astfel încât $2^k | 9^n - 1$.

Soluţie:

Se observă că $9^n + 1$ se divide cu 2, dar nu cu 4 .... 0.5p

Apoi, avem:

$9^{2t+1} - 1 = 8[9^{2t} + 9^{2t-1} + ... + 9 + 1] = 8u,\ u \in \mathbb{N}$ 1p

adică $9^{2t+1} - 1$ se divide cu 8 şi nu se dvide cu $2^4 = 16$, deoarece u este număr impar 1p

Pentru $p \geq 1$, din

$9^{2^p(2t+1)} - 1 = (9^{2^{p-1}(2t+1)} - 1)(9^{2^{p-1}(2t+1)} + 1)$ 1p

rezultă că numerele $9^{2^p(2t+1)} - 1$ au în descompunerea lor exact cu un factor 2 mai mult decât $9^{2^{p-1}(2t+1)} - 1$ 1p

Deci numărul $9^{2^p(2t+1)} - 1$ este divizibil prin 2^{p+3}, dar nu prin 2^{p+4} 1p

Rezultă că $n = 2^{k-3},\ \forall k \geq 3$ 1p

Pentru $k = 1, 2$ rezultă $n = 1$ 0.5p

Subiectul III

Fie $a_1,\ a_2, ..., a_n,\ n \geq 2$, numere reale pozitive astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = n$.

i) Arătaţi că $a_1 a_2 ... a_n \leq 1$;

ii) $\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i^3 + a_i + 1) \leq 3^n,\ \forall n \geq 2$.

Soluţie:

i) Avem $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$ 0.5p

de unde $x \leq \frac{x^2+1}{2}$ 1p

Atunci:

$a_1 a_2 ... a_n \leq \frac{a_1^2+1}{2} \cdot \frac{a_2^2+1}{2} \cdot ... \cdot \frac{a_n^2+1}{2} \leq$ 0.5p

$\frac{1}{2^n} (\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+n}{n})^n =$ 0.5p

$= \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 1$ 0.5p

ii) Avem $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0, \forall\ x \in\ \mathbb{R}$ 1p

de unde $x^3 + x + 1 \leq \frac{x^4+6x^2+5}{4} = \frac{(x^2+1)(x^2+5)}{4}$ 1p

Atunci:

$\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i^3 + a_i + 1) \leq \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{(a_i^2+1)(a_i^2+5)}{4} =$ 0.5p

$= \frac{1}{2^{2n}} (\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i^2 + 1))(\prod\limits_{i=1}^{n} (a_i^2 + 5)) \leq$ 0.5p

$\frac{1}{2^{2n}} (\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + n}{n})^n (\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + 5n}{n})^n$ 0.5p

$= \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^n \cdot 6^n = 3^n$ 0.5p