Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a VII-a

1. a) Să se determine valorile naturale ale lui n, pentru care fracția $\dfrac{2n-1}{9n+4}$ se poate simplifica.

b) Arătați că nu există numere naturale nenule x, y, z pentru care $x^2 + y^2 = 7 \cdot (x, z)$ și $x^2 + z^2 = 7 \cdot (x, y)$. (Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b.)

Gazeta Matematică, 5/2011

Barem de corectură:

a) Fie $p \in \mathbb{N}^*$, p prim, astfel încât $p/2n - 1$ și $p/9n + 4$. Deci $p/9 \cdot (2n - 1)$ și $p/2 \cdot (9n + 4)$, de unde $p/(18n + 8) - (18n - 9)$, adică $p/17$ și cum p este prim rezultă $p = 17$. .... **(2p)**

Prin urmare, $2n - 1 = 17k (k \in \mathbb{N})$, de unde $n = \dfrac{17k+1}{2} \in \mathbb{N}$ și $k = 2q + 1 (q \in \mathbb{N})$, adică $n = 17q + 9$, $q \in \mathbb{N}$. .... **(1p)**

b) Resturile împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 7 sunt: 0, 1, 2 sau 4. Deci restul împărțirii numărului $x^2 + y^2$ la 7 este 0 dacă și numai dacă $7/x$ și $7/y$. **(1p)**

Din $x^2 + y^2 = 7 \cdot (x, z)$ rezultă că $7/\ x^2 + y^2$, adică restul împărțirii lui $x^2 + y^2$ la 7 este egal cu 0 și urmează că $7/x$ și $7/y$. ....**(1p)**

Fie $(x, z) = c$ și $(x, y) = d$. Atunci există m, n, p, $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $x = mc$; $z = nc$; $x = pd$ și $y = qd$ cu $(m, n) = 1$ și $(p, q) = 1$.

Deci $x^2 + y^2 = m^2c^2 + q^2d^2 = 7c$ și $x^2 + z^2 = p^2d^2 + n^2c^2 = 7d$, **(*)**. ....**(1p)**

Însă din $7/x$ și $7/y$ rezultă $x = 7r$ și $y = 7s$, unde r, s * și $x^2 + y^2 = 49r^2 + 49s^2 = 7c$, de unde $7/c$, deci $c \geq 7$. Analog, $d \geq 7$.

Urmează că $(m^2 + n^2) \cdot c^2 > 7c$ și $(q^2 + p^2) \cdot d^2 > 7d$, de unde $(m^2 + n^2) \cdot c^2 + (q^2 + p^2) \cdot d^2 > 7c + 7d$, în contradicție cu relația **(*)**. .... **(1p)**

2. a) Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $\sqrt{x^2 - y} = 4 - x^2$.

b) Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$, știind că fracțiile: $\dfrac{n+1}{3n^2+2n}$ și $\dfrac{10}{261}$ sunt echivalente.

Rodica Coman

Barem de corectură:

2. a) Din condițiile de existență a radicalului avem relațiile: $x^2 - y \geq 0$ și $4 - x^2 \geq 0$, de unde $x^2 \leq 4$, deci $x \in \{-2; -1; 0; 1\ ; 2\}$. .... **(1p)**

$x \in \{-2; 2\}$ implică $\sqrt{4-y} = 0$, de unde $y = 4$.

$x \in \{-1; 1\}$ implică $\sqrt{1-y} = 3$, de unde $y = -8$. .... **(1p)**

$x = 0$ implică $\sqrt{-y} = 4$, de unde $y = -16$. Deci $(x, y) \in \{(-2; 4); (-1; -8); (0; -16); (1; -8);(2; 4)\}$. .... **(1p)**

b) Din $\dfrac{n+1}{3n^2+2n} = \dfrac{10}{261}$ **(1)** rezultă $261(n+1) = 10(3n^2+2n)$, de unde $n + 1/30n^2 + 20n$ sau $n + 1/30(n^2-1) + 20(n+1) + 10$. .... **(1p)**

Cum $n + 1/30(n^2-1) + 20(n+1)$ rezultă $n + 1/10$. .... **(1p)**

Deci $n + 1 \in \{1, 2, 5, 10\}$ și $n \in \{1, 4, 9\}$. .... **(1p)**

Verifică relația **(1)** doar $n = 9$, soluție. .... **(1p)**

Alte abordări:

i) Ecuația $\dfrac{n+1}{3n^2+2n} = \dfrac{10}{261}$ este echivalentă cu $30n^2 - 241n = 261$, de unde $n/261$, adică $n \in \{1, 3, 9, 87, 29, 261\}$. Verifică numai $n = 9$.

ii) Se arată că funcția $\dfrac{n+1}{3n^2+2n}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și urmează că $n + 1 = 10$, de unde $n = 9$.

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E, F, O, M, P și N astfel încât: $E \in (AB)$, $F \in (AB)$, $AE = FB = \dfrac{AB}{4}$; $\{O\} = AC \cap BD$; $DE \cap FC = \{M\}$; $MO \cap AB = \{P\}$; $DP \cap MB = \{N\}$ și $AB = 12$ cm.

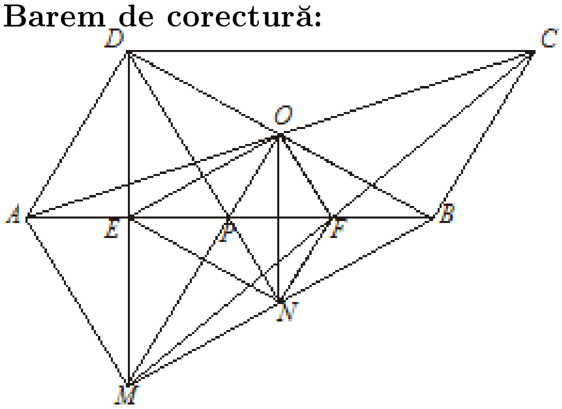
a) Aflați lungimea segmentului (PE).

b) Arătați că patrulaterul $MNOE$ este paralelogram.

c) Dacă $BC = AM = \dfrac{AB}{2}$, arătați că dreptele BD și BC sunt perpendiculare, iar triunghiul NOE este echilateral.

Artur Bălăucă, Nicolae Sanda

Barem de corectură:



3. a) În DMC, (EF) este linie mijlocie pentru că $EF \| CD$ și $EF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2}$. **(1p)**

Deci, $(DE) \equiv (EM)$ și cum $(OD) \equiv (OB)$ rezultă că punctul P este centru de greutate al BDM. .... **(1p)**

Conchidem că $EP = \dfrac{EB}{3} = \dfrac{3}{4}AB \cdot \dfrac{1}{3}$ =3 cm. .... **(1p)**

b) Triunghiul ONE este triunghiul *median* al DBM, deci $MNOE$ este paralelogram. **(1p)**

c) Cum (OP) și (OF) sunt linii mijlocii în ABC și, respectiv, AMC rezultă că $OP = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AM}{2} = OF = \dfrac{AB}{4}$ =3 cm. Cum $PF = \dfrac{AB}{4}$ =3 cm rezultă că triunghiul OPF este echilateral. .... **(1p)**

În OPB, OF este mediană și $OF = \dfrac{PB}{2}$, deci $m(\sphericalangle POB) = 90° = m(\sphericalangle ADB)$ (corespondente). Prin urmare, $AD \perp BD$ și $BD \perp BC$. .... **(1p)**

În ADM isoscel, mediana AE este și mediatoarea segmentului (MD). Deci $(BD) \equiv (MB)$ și cum $m(DBM) = 60°$, urmează că MDB este echilateral, de unde rezultă că și triunghiul său median este echilateral. .... **(1p)**