Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a V-a

1. a) Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care împărțite la 36 dau restul un pătrat perfect.

Gazeta Matematică, 5/2011

b) În 8 cutii sunt 51 de bile roșii, galbene și albastre. Știind că în fiecare cutie sunt bile de toate culorile, arătați că există cel puțin două cutii care conțin același număr de bile.

Barem de corectură:

a) Avem $\overline{ab} = 36 \cdot c + r^2$, unde $r^2 < 36$, adică $r \leq 5$. .... **(1p)**
$r = 0$. $\overline{ab} = 36 \cdot c$ implică $c \in \{1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{36; 72\}$
$r = 1$. $\overline{ab} = 36 \cdot c + 1$ implică $c \in \{1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{37; 73\}$ .... **(1p)**
$r = 2$. $\overline{ab} = 36 \cdot c + 4$ implică $c \in \{1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{40; 76\}$
$r = 3$. $\overline{ab} = 36 \cdot c + 9$ implică $c \in \{1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{45; 81\}$ .... **(1p)**
$r = 4$. $\overline{ab} = 36 \cdot c + 16$ implică $c \in \{0, 1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{16; 52; 88\}$
$r = 5$. $\overline{ab} = 36 \cdot c + 25$ implică $c \in \{0, 1, 2\}$, adică $\overline{ab} \in \{25; 61; 97\}$. .... **(1p)**
b) Dacă presupunem că nu există două cutii cu același număr de bile, atunci numărul minim de bile din toate cele 8 cutii este egal cu $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 52$, imposibil. .... **(2p)**
Trebuie să eliminăm o bilă din cutiile care conțin 4, 5, 6, 7, 8, 9 sau 10 bile, iar în această situație există sigur două cutii cu același număr de bile. .... **(1p)**

2. Un elev premiant primește la sfârșitul anului școlar o enciclopedie. El citește în prima zi de vacanță, 18 iunie 2011, primele cinci pagini ale ei. Apoi citește în fiecare zi cu două pagini mai mult decât în ziua precedentă.

a) În ce dată a terminat de citit primul capitol care are 140 de pagini?

b) Știind că a terminat de citit cartea în 17 iulie 2011, aflați câte paginia are aceasta.

Rodica Coman

Barem de corectură:

a) Numărul paginilor citite de elev în primele n zile este egal cu: $5 + (5 + 1 \cdot 2) + (5 + 2 \cdot 2) + (5 + 3 \cdot 2) + ... + [5 + (n - 1) \cdot 2] = (\underbrace{5 + 5 + ... + 5}_{n \text{ termeni}}) + [1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + ...+ (n - 1) \cdot 2] = 5 \cdot n + 2 \cdot [1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)] = 5 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) \cdot n : 2 = 5 \cdot n + n(n - 1) = n^2 + 4 \cdot n = n \cdot (n + 4)$. .... **(2p)**

Avem $n(n + 4) = 140$, de unde $n = 10$. .... **(2p)**

Deci primul capitol l-a citit în 10 zile, adică l-a terminat pe 27 iunie, 2011. ..... **(1p)**

b) Elevul a terminat de citit cartea în $(30 - 17) + 17 = 30$ de zile. .... **(1p)**

Cartea are $30 \cdot (30 + 4) = 30 \cdot 34 = 1020$ de pagini. .... **(1p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $x^{y^z} = 36$;

b) $x^{y^z} + x^{z^y} = 32$.

Artur Bălăucă, Monica Sas

Barem de corectură:

a) Observăm mai întâi că $36 = 36^1 = 6^2$. .... **(1p)**

Cazul $x^{y^z} = 36^1$, conduce la: $x = 36$ și $y = 1$, iar $z = k$, $k \in \mathbb{N}$, k oarecare sau $x = 36$ și $y = q \ \in \mathbb{N}^*$, iar $z = 0$, q oarecare. .... **(1p)**

Cazul $x^{y^z} = 6^2$, conduce la: $x = 6$ și $y^z = 2$, de unde $y = 2$ și $z = 1$.

Prin urmare $(x, y, z) \in \{(36, 1, k), (36, q, 0), (6, 2, 1)\}$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $q \in \mathbb{N}^*$. . **(1p)**

b) Mai întâi observăm că $x \geq 2$, iar y și z nu pot fi simultan nule.

Cazul $y = 0$, implică $1 + x = 32$, de unde $x = 31$, iar $z \in \mathbb{N}^*$, z oarecare.

Cazul $z = 0$, implică $x + 1 = 32$, de unde $x = 31$, iar $y \in \mathbb{N}^*$, y oarecare. ...... **(1p)**

Cazul $y \in \mathbb{N}^*$ și $z \in \mathbb{N}^*$ implică $x/32$ și cum $x \geq 2$ rezultă că x este par.

Dacă $y = z$, atunci $2 \cdot x^{y^y} = 32$, de unde $x^{y^y} = 16 = 16^1 = 2^4 = 4^2$.

$x = 16$ și $y^{\,y} = 1$ implică $x = 16$ și $y = z = 1$, soluție.

$x = 2$ și $y^{\,y} = 4$ implică $x = 2$ și $y = z = 2$, soluție.

$x = 4$ și $y^{\,y} = 2$, absurd. .... **(1p)**

Dacă $y \neq z$, putem presupune că $y < z$ și avem: $x^{y^z}\left(1 + x^{z^y - y^z}\right) = 32$, imposibil pentru că $1 + x^{z^y - y^z}$ este impar, mai mare decât 1. .... **(1p)**

Prin urmare, $(x, y, z) \in \{(16, 1, 1), (2, 2, 2), (31, 0, k), (31, q, 0)\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $q \in \mathbb{N}^*$. .... **(1p)**